

ISSN 1609-0586

BAKİ UNİVERSİTETİNİN XƏVƏRLƏRİ

ВЕСТНИК
БАКИНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

NEWS
OF BAKU UNIVERSITY

FİZİKA-RİYAZİYYAT
elmləri seriyası

серия

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

series of

PHYSICO-MATHEMATICAL SCIENCES

№ 4, 2020

Bakı–2020

RİYAZİYYAT

ON THE ITERATIVE SEQUENCES
OF THE LINEAR BOUNDED OPERATORS AND APPLICATIONS

A.M.AKHMEDOV, R.M.BABAYEV

*Baku State University**ali.akhmedov@rambler.ru*

In this paper, we consider an iterative process for an infinite family of bounded linear operators on a Banach space. Boundedness and convergence of the considered iterative process are established in Banach spaces. We also apply the main result presented in this paper for certain spectral problems in summability theory.

AMS: 47J25; 40A05**Keywords:** Iterative process; Convergence; Bounded linear operator; Banach space.**1. Introduction**

Throughout this paper, we assume that X is a real or complex Banach space. The Banach algebra of all bounded linear operators on X is denoted by $B(X)$. By N we denote the set of all nonnegative integers, i.e., $N = \{0, 1, 2, \dots\}$. We shall write c_0 for the space of all null sequences. By $\sigma(T)$ we denote the spectrum of the operator T on X .

A linear operator T on a Banach space X is called a *strictly contractive* if $\|T\| < 1$. Many authors have investigated some iteration processes for a finite family of nonexpansive operators [1,2,3].

This paper is motivated by some problems in the study of the spectrum and the fine spectrum of some linear operators defined by some particular limitation matrices (cf. [4,5,6]). The following lemma will be used in the next section (cf. [7]).

Lemma 1.1. *Let (c_n) and (d_n) be two sequences of complex numbers such that $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c$ and $|c| < 1$. Define the sequence (z_n) of complex numbers such that $z_{n+1} = c_{n+1}z_n + d_{n+1}$. Then we have:*

(i) (d_n) is bounded, iff (z_n) is bounded,

- (ii) (d_n) is convergent, iff (z_n) is convergent,
 (iii) (d_n) is null sequence, iff (z_n) is null sequence.

In this paper we consider the following iterative process for an infinite family of bounded linear operators:

$$z_0 \in X, \quad z_{n+1} = T_n z_n + y_n, \quad n \in N, \quad (1.1)$$

where $T_n : X \rightarrow X$ is a bounded linear operator on X , for each $n \in N$, and (y_n) is a sequence in X .

The purpose of this paper is to study the boundedness and the convergence of the sequence (z_n) which is generated by the iterative process (1.1) for an infinite family of bounded linear operators on an arbitrary real or complex Banach space. More precisely, we prove under conditions that the sequence (z_n) is bounded if and only if the sequence (y_n) is bounded. Also, we prove under conditions that the sequence (z_n) converges to a unique fixed point of a linear operator W which is defined by $Wz = Tz + y$, $z \in X$, where $y_n \rightarrow y$, as $n \rightarrow \infty$ and $T_n \rightarrow T$ uniformly on X . The result presented in this paper may be applied to certain problems in summability theory.

2. Main Results

In this section, we are going to prove the following main result

Theorem 2.1. *Let X be a real or complex Banach space and $T_n \in B(X)$, for each $n \in N$, and (y_n) is any sequence in X . Also, (z_n) be a sequence generated by (1.1). If $T_n \rightarrow T$ uniformly on X and T is a strictly contractive operator, then we have the following:*

- (1) *The sequence (z_n) is bounded if and only if (y_n) is bounded.*
 (2) *If (y_n) is convergent and $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$, then the sequence (z_n) converges to unique fixed point $x \in F(W)$, where W is given by*

$$Wz = Tz + y, \quad z \in X$$

and x has the form $x = \sum_{n=0}^{\infty} T^n y$.

In order to prove this result, we need the following lemma.

Lemma 2.2 *Let $T \in B(X)$ be a strictly contractive operator on a Banach space X , and $y \in X$. Then the sequence (x_n) which is generated by $x_{n+1} = Tx_n + y$, converges to the limit*

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} T^n y$$

and the limit x is the unique fixed point of the operator W which is given by

$$Wz = Tz + y, \quad z \in X.$$

Proof. It is clear that W is a contractive operator. Indeed, if z_1 and z_2 are any

elements of X , then

$$\|Wz_1 - Wz_2\| = \|Tz_1 - Tz_2\| \leq \|T\| \|z_1 - z_2\|,$$

and the operator W has unique fixed point $x \in X$, and also $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Since

$$x_{n+1} = T^{n+1}x_0 + (I + T + \dots + T^n)y,$$

we have

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} T^n y.$$

This completes the proof of the lemma.

We are now ready to prove Theorem 2.1.

Proof of Theorem 2.1. (1) Since $\|T\| < 1$, then there exist a real number $n_0 \in \mathbb{N}$, such that $\|T_n\| < q < 1$ for all $n \geq n_0$. From (1.1), we have

$$\begin{aligned} \|z_n\| &\leq \|T_{n_0}\| \|T_{n_0+1}\| \dots \|T_{n-1}\| \|z_{n_0}\| + \\ &\quad + \|T_{n_0+1}\| \|T_{n_0+2}\| \dots \|T_{n-1}\| \|y_{n_0}\| + \dots + \|T_{n-1}\| \|y_{n-2}\| + \|y_{n-1}\|, \end{aligned}$$

for all $n \geq n_0$. If (y_n) is a bounded sequence, then there exists a real number K such that $\|y_n\| \leq K$, for all $n \in \mathbb{N}$. Then,

$$\begin{aligned} \|z_n\| &\leq q^{n-n_0} \|z_{n_0}\| + q^{n-n_0-1}K + \dots + qK + K = \\ &= q^{n-n_0} \|z_{n_0}\| + \frac{1-q^{n-n_0}}{1-q}K (=M), \end{aligned}$$

for all $n \geq n_0$. This implies that the sequence (z_n) is bounded. The reverse of the assertion is obvious.

(2) Consider the sequence (x_n) which is generated by

$$x_{n+1} = Tx_n + y,$$

where $y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$. In Lemma 2.2, we have shown that the sequence (x_n) converges to the element

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} T^n y.$$

In order to show that (z_n) is convergent sequence with the limit x , it is sufficient to prove that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n - x_n\| = 0.$$

Indeed,

$$\begin{aligned} \|z_{n+1} - x_{n+1}\| &= \|T_n z_n + y_n - Tx_n - y\| = \\ &= \|T_n z_n - Tz_n + Tz_n - Tx_n + y_n - y\| \leq \\ &\leq \|T_n - T\| \|z_n\| + \|T\| \|z_n - x_n\| + \|y_n - y\| \leq \\ &\leq M \|T_n - T\| + \|T\| \|z_n - x_n\| + \|y_n - y\|, \end{aligned}$$

where $M = \sup_n (\|z_n\|)$ (the boundedness of (z_n) follows from the first assertion).

From the conditions of the theorem, it follows that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (M \|T_n - T\| + \|y_n - y\|) = 0.$$

Then for any $\varepsilon > 0$, there is a number n_ε such that

$$M \|T_n - T\| + \|y_n - y\| < \varepsilon,$$

for all $n \geq n_\varepsilon$. Therefore

$$\|z_{n+1} - x_{n+1}\| \leq \|T\| \|z_n - x_n\| + \varepsilon,$$

for all $n \geq n_\varepsilon$. Then it is easy to see that

$$\begin{aligned} \|z_{n+1} - x_{n+1}\| &\leq \|T\|^{n-n_\varepsilon+1} \|z_{n_\varepsilon} - x_{n_\varepsilon}\| + \varepsilon (1 + \|T\| + \|T\|^2 + \dots + \|T\|^{n-n_\varepsilon}) \leq \\ &\leq \|T\|^{n-n_\varepsilon+1} \|z_{n_\varepsilon} - x_{n_\varepsilon}\| + \frac{\varepsilon}{1 - \|T\|}, \end{aligned}$$

for all $n \geq n_\varepsilon$. But $\|T\|^{n-n_\varepsilon+1} \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$. So, we have

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n - x_n\| = 0,$$

and so,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n - x\| = 0.$$

This completes the proof of the theorem.

Remark 2.3 The results in Theorem 2.1 are generalization of the results in Lemma 1.1.

3. Application

In this section we apply Theorem 2.1 for certain spectral problems.

It is known that the infinite real matrices as operators acting on sequence spaces play main role in summability theory, among them the difference operator-matrices and their generalizations (cf. [5-16]).

Now, let (a_k) be either constant or strictly decreasing sequence of positive real numbers such that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_k = a > 0$$

and

$$\sup_k (a_k) \leq 2a.$$

It is easy to see that $\sup_k (a_k) = a_0$.

In [5], the authors introduced new generalized difference operator

$$\Delta_a = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 & \cdots \\ -a_0 & a_1 & 0 & \cdots \\ 0 & -a_1 & a_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

and investigated the spectrum of the operator Δ_a over the sequence space c_0 .

In order to determine the spectrum of the operator Δ_a , it is required to study the resolvent operator $(\Delta_a - \lambda I)^{-1}$, where I is the identity operator on the Banach space c_0 .

If $|\lambda - a| > a$, then $(\Delta_a - \lambda I)$ is triangle and hence $(\Delta_a - \lambda I)^{-1}$ exists. Calculating $(\Delta_a - \lambda I)^{-1}$, we get

$$(\Delta_a - \lambda I)^{-1} = (s_{nk}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{(a_0 - \lambda)} & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{a_0}{(a_0 - \lambda)(a_1 - \lambda)} & \frac{1}{(a_1 - \lambda)} & 0 & \cdots \\ \frac{a_0 a_1}{(a_0 - \lambda)(a_1 - \lambda)(a_2 - \lambda)} & \frac{a_1}{(a_1 - \lambda)(a_2 - \lambda)} & \frac{1}{(a_2 - \lambda)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

In order to prove the boundedness of the resolvent $(\Delta_a - \lambda I)^{-1}$ on c_0 it is necessary to establish the boundedness of the sequence

$$S_n = \frac{a_0 a_1 \dots a_{n-1}}{|a_0 - \lambda| |a_1 - \lambda| \dots |a_n - \lambda|} + \dots + \frac{a_{n-1}}{|a_{n-1} - \lambda| |a_n - \lambda|} + \frac{1}{|a_n - \lambda|}, \quad (3.1)$$

[5]. Suppose that

$$\beta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n-1}}{|a_n - \lambda|} = \frac{a}{|a - \lambda|} < 1. \quad (3.2)$$

It is easy to show that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|a_n - \lambda|} = \frac{\beta}{a} \quad (3.3)$$

and also,

$$S_n = \frac{a_{n-1}}{|a_n - \lambda|} S_{n-1} + \frac{1}{|a_n - \lambda|}. \quad (3.4)$$

Denote

$$f_n = \frac{a_{n-1}}{|a_n - \lambda|}, \quad g_n = \frac{1}{|a_n - \lambda|}, \quad n \in N$$

From (3.2) and (3.3), it follows that the sequences (f_n) and (g_n) belong to c .

Let us introduce the following operators

$$T_n x = f_n x, \quad n \in N$$

where $x \in c$. From (3.2), we have

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T, \quad \|T\| = \frac{a}{|a - \lambda|} < 1$$

Now, by applying Theorem 2.1, we get that the sequence (S_n) in (3.4) is bounded.

Thus we have proved the following theorem.

Theorem 3.1. *Suppose that $|\lambda - a| > a$. Then, the following assertions are true*

(1) *The sequence (S_n) is bounded if and only if the sequence $\left(\frac{1}{|a_n - \lambda|}\right)$ is bounded.*

(2) *The sequence (S_n) is convergent if the sequence $\left(\frac{1}{|a_n - \lambda|}\right)$ is convergent.*

(3) *If $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = s$, then $s = \frac{1}{|\lambda - a| - a}$*

(4) $\sigma(\Delta_a) = \{ \lambda : |\lambda - a| \leq a \}$

Remark 3.2. Note that, in [5], the authors used the convergence of the sequence (S_n) without proof.

REFERENCES

1. Chidume C. E., Shahzad N. Strong convergence of an implicit iteration process for a finite family of nonexpansive mappings // *Nonlinear Anal.*, 2005, 62, no. 6, p. 1149-1156.
2. Plubtieng S., Ungchittrakool K., Wangkeeree R. Implicit iterations of two finite families for nonexpansive mappings in Banach spaces // *Numer. Funct. Anal. Optim.*, 2007, 28, no. 5-6, p. 737-749.
3. Xu H. K., Ori R. G. An implicit iteration process for nonexpansive mappings // *Numer. Funct. Anal. Optim.*, 2001, 22, no. 5-6, p. 767-773.
4. Akhmedov A.M., El-Shabrawy S.R. On the fine spectrum of the operator $\Delta_{a,b}$ over the sequence space c // *Comput. Math. Appl.*, 2011, 61, p. 2994-3002.
5. Srivastava P.D., Kumar S. On the fine spectrum of the generalized difference operator Δ_ν over the sequence space c_0 // *Commun. Math. Anal.*, 2009, 6, no.1, p. 8-21.
6. Srivastava P.D., Kumar S. Fine spectrum of the generalized difference operator Δ_ν on sequence space l_1 // *Thai J. Math.*, 2010, 8, no. 2, p. 221-233.
7. Akhmedov A.M., Babayev R. M., On the convergence of an iterative process for an infinite family of bounded linear operators with application, *Baki Universiteti Xəbərleəri*, №1, fiz.-riy. elmləri seriyası, 2012, səh. 5-12
8. Akhmedov A.M., Başar F. On the fine spectra of the difference operator Δ over the sequence space l_p , $(1 \leq p < \infty)$ // *Demonstratio Math.*, 2006, 39, no. 3, p. 585-595.
9. Akhmedov A.M., Başar F. The fine spectra of the difference operator Δ over the sequence space bv_p , $(1 \leq p < \infty)$ // *Acta Math. Sin. Engl. Ser.*, 2007, 23, no. 10, p. 1757-1768.
10. Akhmedov A.M. On the spectrum of the generalized difference operator Δ_α over the sequence space l_p $(1 \leq p < \infty)$ // *Baku Univ. News J., Phys. Math. Sci. Ser.*, 2009, 3, p. 34-39.
11. Akhmedov A.M., El-Shabrawy S.R. On the fine spectrum of the operator Δ_ν over the sequence spaces c and l_p , $(1 < p < \infty)$ // *Appl. Math. Inf. Sci.*, 2011, 5, no. 3, p. 635-654.

12. Akhmedov A.M., El-Shabrawy S.R. The spectrum of the generalized lower triangle double-band matrix Δ_a over the sequence space c // Al-Azhar Univ. Eng. J., JAUES (special issue), Dec. 2010, 5, no. 9, p. 54-63.
13. Akhmedov A.M., El-Shabrawy S.R. On the spectrum of the generalized difference operator $\Delta_{a,b}$ over the sequence space c_0 // Baku Univ. News J., Phys. Math. Sci. Ser., 2010, no. 4, p. 12-21.
14. Altay B., Başar F. On the fine spectrum of the difference operator Δ on c_0 and c // Inform. Sci., 2004, 168, p. 217-224.
15. Altay B., Başar F. On the fine spectrum of the generalized difference operator $B(r, s)$ over the sequence spaces c_0 and c // Internat. J. Math. Math. Sci., 2005, 18, p. 3005-3013.
16. Altay B., Karakuş M. On the spectrum and the fine spectrum of the Zweier matrix as an operator on some sequence spaces // Thai J. Math., 2005, 3, no. 2, p. 153-162.
17. Bilgiç H., Furkan H. On the fine spectrum of the generalized difference operator $B(r, s)$ over the sequence spaces l_p and bv_p , ($1 < p < \infty$) // Nonlinear Anal., 2008, 68, p. 499-506.

XƏTTİ MƏHDUD OPERATORLARIN BİR İTERATİV ARDİCILLIQLARI VƏ TƏTBİQİ HAQQINDA

Ə.M.ƏHMƏDOV, R.M.BABAYEV

XÜLASƏ

İşdə Banax fəzasında təsir edən xətti məhdud operatorların sonsuz ailəsinin bəzi iterativ ardıcılıqları tədqiq olunur. Bu ardıcılıqların Banax fəzasında yığılması və məhdudluğu göstərilmiş və xətti operatorların spektral nəzəriyyəsinin bəzi məsələlərinə tətbiq olunmuşdur.

Açar sözləri: iterativ proses, yığılma, məhdud xətti operator, Banax fəzası

ОБ ОДНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ОГРАНИЧЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЙ

А.М.АХМЕДОВ, Р.М.БАБАЕВ

РЕЗЮМЕ

В работе исследуются некоторые итеративные последовательности линейных ограниченных операторов, действующих в банаховом пространстве. Сходимость и ограниченность этих итеративных последовательностей также установлены. Полученные результаты были применены к одной спектральной задаче теории операторов.

Ключевые слова: итеративный процесс, сходимость, ограниченный линейный оператор, Банахово пространство

УДК 517.95

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ОБРАТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ БУССИНСКА ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА С НЕЛОКАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Я.Т.МЕГРАЛИЕВ, Ф.Х.АЛИЗАДЕ
Бакинский Государственный Университет
yashar_aze@mail.ru, farxad@gmail.com

Исследуется обратная нелинейная краевая задача для одного уравнения Буссинска четвёртого порядка с нелокальными условиями. Задача рассматривается в прямоугольной области. При решении исходной обратной краевой задачи осуществляется переход от исходной обратной задачи к некоторой вспомогательной обратной задаче. С помощью сжатых отображений доказываются существование и единственность решения вспомогательной задачи. Затем вновь производится переход к исходной обратной задаче, в результате делается вывод о разрешимости исходной обратной задаче.

Ключевые слова: обратная краевая задача, уравнения Буссинска, метод Фурье, классическое решение.

В настоящее время теория нелокальных задач интенсивно развивается и представляют собой важный раздел теории дифференциальных уравнений с частными производными. Большой интерес в этой области представляют задачи с нелокальными интегральными условиями. Появление интегральных условий связано с тем, что при изучении некоторых физических процессов границы областей их протекания могут оказаться недоступными для непосредственных измерений, но известно среднее значение искомым величин. Условия такого вида могут появиться при математическом моделировании явлений, связанных с физикой плазмы [1], распространением тепла [2,3], процессом влагопереноса в капиллярно – пористых средах [4], вопросами демографии и математической биологии.

В последнее время уделяется большое внимание изучению различных нелинейных эволюционных уравнений, описывающих волновые процессы в средах с дисперсией. Одним из них является уравнение Буссинеска, выведенное автором в [5] и описывающее распространение длинных волн на мелкой воде. Это уравнение интересно как с физической, так и с математической точки зрения

Обратными задачами для дифференциальных уравнений принято называть задачи определения дифференциальных уравнений по дополнительной информации об их решениях.

Целью данной работы является доказательство единственности и существования решений обратной краевой задачи для одного уравнения Буссинска четвёртого порядка с периодическим и интегральным условием.

1. Постановка задачи и её сведение к эквивалентной задаче.

Рассмотрим для уравнения [5-7].

$$u_{tt}(x,t) - 2\alpha u_{txx}(x,t) + \beta u_{xxxx}(x,t) = a(t)u(x,t) + b(t)g(x,t) + f(x,t) \quad (1)$$

в области $D_T = \{(x,t) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$ обратную краевую задачу с начальными условиями

$$u(x,0) = \varphi(x) + \int_0^T p_1(t)u(x,t)dt, u_t(x,0) = \psi(x) + \int_0^T p_2(t)u(x,t)dt \quad (0 \leq x \leq 1), \quad (2)$$

периодическими условиями

$$u(0,t) = u(1,t), u_x(0,t) = u_x(1,t), u_{xx}(0,t) = u_{xx}(1,t) \quad (0 \leq t \leq T), \quad (3)$$

нелокальным интегральным условием

$$\int_0^1 u(x,t)dx = 0 \quad (0 \leq t \leq T) \quad (4)$$

и с дополнительным условием

$$u(x_i,t) = h_i(t) \quad (0 < x_i < 1, i = 1,2, \quad x_1 \neq x_2, 0 \leq t \leq T), \quad (5)$$

где $x_i \in (0,1)$ ($i = 1,2$) - фиксированное число, $\alpha > 0, \beta > \alpha^2$ заданные числа, $f(x,t), g(x,t), \varphi(x), \psi(x), p_i(t), h_i(t)$ ($i = 1,2$) - заданные функции, а $u(x,t), a(t)$ и $b(t)$ - искомые функции.

Обозначим

$$\tilde{C}^{(4,2)}(D_T) = \left\{ u(x,t) : u(x,t) \in C^2(D_T), u_{txx}(x,t), u_{xxx}(x,t), u_{xxxx}(x,t) \in C(D_T) \right\}.$$

Определение Тройку $\{u(x,t), a(t), b(t)\}$ функций $u(x,t), a(t)$ и $b(t)$, будем называть классическим решением обратной краевой задачи (1)-(5),

если $u(x,t) \in \tilde{C}^{(4,2)}(D_T), a(t) \in C[0, T], b(t) \in C[0, T]$ и

$\{u(x,t), a(t), b(t)\}$ удовлетворяет (1)-(5) в обычном смысле.

С целью исследования задачи (1)-(5) сначала рассмотрим следующую задачу:

$$y''(t) = a(t)y(t) \quad (0 \leq t \leq T), \quad (6)$$

$$y(0) = \int_0^T p_1(t)y(t)dt, \quad y'(0) = \int_0^T p_2(t)y(t)dt, \quad (7)$$

где $p_1(t), p_2(t), a(t)$ - заданные функции, а $y = y(t)$ - искомая функция,

причем под решением задачи (6), (7) понимаем функцию $y(t)$ принадлежащую $C^2[0, T]$ и удовлетворяющую условиям (6), (7) в обычном смысле.

Справедлива следующая

Лемма 1[8].. Пусть функции

$p_1(t) \in C[0, T]$, $p_2(t) \in C[0, T]$, $a(t) \in C[0, T]$ и

$$\|a(t)\|_{C[0, T]} \leq R = \text{const}.$$

Кроме того

$$\left(T \|p_2(t)\|_{C[0, T]} + \|p_1(t)\|_{C[0, T]} + \frac{T}{2} R \right) T < 1.$$

Тогда задача (6), (7) имеет только тривиальное решение.

Наряду с обратной краевой задачей (1)- (5) рассмотрим следующую вспомогательную обратную краевую задачу: Требуется определить

тройку $\{u(x, t), a(t), b(t)\}$ функций $u(x, t) \in \tilde{C}^{(4, 2)}(D_T)$,

$a(t) \in C[0, T]$, $b(t) \in C[0, T]$, из соотношений (1)-(3),

$$u_{xxx}(0, t) = u_{xxx}(1, t) \quad (0 \leq t \leq T), \quad (8)$$

$$a(t)h_i(t) + b(t)g(x_i, t) + f(x_i, t) = h_i''(t) - 2\alpha u_{ixx}(x_i, t) + \beta u_{xxx}(x_i, t) \quad (i = 1, 2; 0 \leq t \leq T). \quad (9)$$

Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть

$f(x, t), g(x, t) \in C(D_T)$, $\varphi(x), \psi(x) \in C[0, 1]$, $p_i(t) \in C[0, T]$ ($i = 1, 2$),

$h_i(t) \in C^2[0, T]$ ($i = 1, 2$), $h(t) = h_1(t)g(x_2, t) - h_2(t)g(x_1, t) \neq 0$,

$$\int_0^1 f(x, t) dx = 0, \int_0^1 g(x, t) dx = 0 \quad (0 \leq t \leq T) \text{ и выполняются условия согласования}$$

$$\int_0^1 \varphi(x) dx = 0, \int_0^1 \psi(x) dx = 0, \quad (10)$$

$$\varphi(x_i) + \int_0^T p_1(t)h_i(t) dt = h_i(0), \psi(x_i) + \int_0^T p_2(t)h_i(t) dt = h_i'(0) \quad (i = 1, 2). \quad (11)$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

Каждое классическое решение $\{u(x, t), a(t), b(t)\}$ задачи (1)-(5) является и решением задачи (1)-(3), (8), (9);

Каждое решение $\{u(x, t), a(t), b(t)\}$ задачи (1)-(3), (8), (9), такое,

что

$$\left(T \|p_2(t)\|_{C[0, T]} + \|p_1(t)\|_{C[0, T]} + \frac{T}{2} \|a(t)\|_{C[0, T]} \right) T < 1 \quad (12)$$

является классическим решением (1)-(5).

Доказательство. Пусть $\{u(x,t), a(t), b(t)\}$ является классическим решением задачи (1)-(5). Интегрируя уравнение (1) по x от 0 до 1, имеем:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dt^2} \int_0^1 u(x,t) dx - 2\alpha(u_{xx}(1,t) - u_{xx}(0,t)) + \beta(u_{xxx}(1,t) - u_{xxx}(0,t)) = \\ & = a(t) \int_0^1 u(x,t) dx + b(t) \int_0^1 g(x,t) dx + \int_0^1 f(x,t) dx \quad (0 \leq t \leq T). \end{aligned} \quad (13)$$

Допуская, что $\int_0^1 f(x,t) dx = 0$, $\int_0^1 g(x,t) dx = 0$ ($0 \leq t \leq T$) и с учётом (3), (4),

легко приходим к выполнению (8).

Подставляя в уравнение (1), $x = x_i$ находим:

$$u_{ii}(x_i, t) - 2\alpha u_{xxx}(x_i, t) + \beta u_{xxxx}(x_i, t) = a(t)u(x_i, t) + b(t)g(x_i, t) + f(x_i, t) \quad (0 \leq t \leq T). \quad (14)$$

Далее, считая $h_i(t) \in C^2[0, T]$ ($i = 1, 2$) и дифференцируя два раза (5), имеем:

$$u_{ii}(x_i, t) = h_i''(t) \quad (i = 1, 2; 0 \leq t \leq T) \quad (15)$$

Из (14), с учетом (5) и (15), приходим к выполнению (9).

Теперь, предположим, что $\{u(x,t), a(t), b(t)\}$ является решением задачи (1)-(3), (8), (9). Тогда из (13), с учетом

$$\int_0^1 f(x,t) dx = 0, \quad \int_0^1 g(x,t) dx = 0 \quad (0 \leq t \leq T) \text{ и (3), (8), находим:}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_0^1 u(x,t) dx = a(t) \int_0^1 u(x,t) dx \quad (0 \leq t \leq T). \quad (16)$$

В силу (2), с учетом (10), нетрудно видеть, что

$$\int_0^1 u(x,0) dx - \int_0^T p_1(t) \left(\int_0^1 u(x,t) dx \right) dt = \int_0^1 \left(u(x,0) - \int_0^T p_1(t) u(x,t) dt \right) dx = \int_0^1 \varphi(x) dx = 0,$$

$$\int_0^1 u_i(x,0) dx - \int_0^T p_2(t) \left(\int_0^1 u(x,t) dx \right) dt = \int_0^1 \left(u_i(x,0) - \int_0^T p_2(t) u(x,t) dt \right) dx = \int_0^1 \psi(x) dx = 0. \quad (17)$$

Так как, в силу Леммы 1, задача (16), (17) имеет только тривиальное решение, то $\int_0^1 u(x,t) dx = 0$ ($0 \leq t \leq T$), т.е. выполняется условие (4).

Далее, из (9) и (14) находим:

$$\frac{d^2}{dt^2} (u(x_i, t) - h_i(t)) = a(t)(u(x_i, t) - h_i(t)) \quad (i = 1, 2; 0 \leq t \leq T). \quad (18)$$

В силу (2) и условий согласования (11), имеем:

$$\begin{aligned}
u(x_i, 0) - h_i(0) - \int_0^T p_1(t)(u(x_i, t) - h_i(t))dt &= u(x_i, 0) - \int_0^T p_1(t)u(x_i, t)dt - \\
- \left(h_i(0) - \int_0^T p_1(t)h_i(t)dt \right) &= \varphi(x_i) - \left(h_i(0) - \int_0^T p_1(t)h_i(t)dt \right) = 0 \quad (i = 1, 2), \\
u_t(x_i, 0) - h'_i(0) - \int_0^T p_2(t)(u(x_i, t) - h_i(t))dt &= u_t(x_i, 0) - \int_0^T p_2(t)u(x_i, t)dt - \\
- \left(h'_i(0) - \int_0^T p_2(t)h_i(t)dt \right) &= \psi(x_i) - \left(h'_i(0) - \int_0^T p_2(t)h_i(t)dt \right) = 0 \quad (i = 1, 2).
\end{aligned}
\tag{19}$$

Из (18) и (19), в силу Леммы 1, заключаем, что выполняются условия (5). Теорема доказана.

2. Разрешимость обратной краевой задачи

Известно [9], что система

$$1, \cos \lambda_1 x, \sin \lambda_1 x, \dots, \cos \lambda_k x, \sin \lambda_k x, \dots \tag{20}$$

образует базис в $L_2(0, 1)$, где $\lambda_k = 2k\pi$ ($k = 1, 2, \dots$).

Так как система (20) образует базис в $L_2(0, 1)$, то очевидно, что для каждого классического решения $\{u(x, t), a(t), b(t)\}$ задачи (1)-(3), (8), (9) его первая компонента $u(x, t)$ имеет вид:

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_{1k}(t) \cos \lambda_k x + \sum_{k=1}^{\infty} u_{2k}(t) \sin \lambda_k x \quad (\lambda_k = 2\pi k), \tag{21}$$

где

$$u_{10}(t) = \int_0^1 u(x, t) dx, u_{1k}(t) = 2 \int_0^1 u(x, t) \cos \lambda_k x dx \quad (k = 1, 2, \dots),$$

$$u_{2k}(t) = 2 \int_0^1 u(x, t) \sin \lambda_k x dx \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Применяя формальную схему метода Фурье, для определения искоемых коэффициентов $u_{1k}(t)$ ($k = 0, 1, \dots$) и $u_{2k}(t)$ ($k = 1, 2, \dots$) функции $u(x, t)$, из (1) и (2) получаем:

$$u''_{10}(t) = F_{10}(t; u, a, b) \quad (0 \leq t \leq T), \tag{22}$$

$$u''_{1k}(t) + 2\alpha \lambda_k^2 u'_{1k}(t) + \beta \lambda_k^4 u_{1k}(t) = F_{1k}(t; u, a, b) \quad (k = 1, 2, \dots, 0 \leq t \leq T), \tag{23}$$

$$u_{1k}(0) = \varphi_{1k} + \int_0^T p_1(t)u_{1k}(t)dt, \quad u'_{1k}(0) = \psi_{1k} + \int_0^T p_2(t)u_{1k}(t)dt \quad (k = 0, 1, \dots), \tag{24}$$

$$u''_{2k}(t) + 2\alpha \lambda_k^2 u'_{2k}(t) + \beta \lambda_k^4 u_{2k}(t) = F_{2k}(t; u, a, b) \quad (k = 1, 2, \dots, 0 \leq t \leq T), \tag{25}$$

$$u_{2k}(0) = \varphi_{2k} + \int_0^T p_1(t)u_{2k}(t)dt, \quad u'_{2k}(0) = \psi_{2k} + \int_0^T p_2(t)u_{2k}(t)dt, \quad (k=1,2,\dots), \quad (26)$$

где

$$F_{1k}(t; u, a, b) = a(t)u_{1k}(t) + b(t)g_{1k}(t) + f_{1k}(t), \quad (k=0,1,\dots),$$

$$f_{10}(t) = \int_0^1 f(x,t)dx, \quad f_{1k}(t) = 2 \int_0^1 f(x,t) \cos \lambda_k x dx \quad (k=1,2,\dots),$$

$$g_{10}(t) = \int_0^1 g(x,t)dx, \quad g_{1k}(t) = 2 \int_0^1 g(x,t) \cos \lambda_k x dx \quad (k=1,2,\dots),$$

$$\varphi_{10} = \int_0^1 \varphi(x)dx, \quad \psi_{10} = \int_0^1 \psi(x)dx, \quad \varphi_{1k} = 2 \int_0^1 \varphi(x) \cos \lambda_k x dx,$$

$$\psi_{1k} = 2 \int_0^1 \psi(x) \cos \lambda_k x dx \quad (k=1,2,\dots)$$

$$F_{2k}(t; u, a, b) = a(t)u_{2k}(t) + b(t)g_{2k}(t) + f_{2k}(t) \quad (k=1,2,\dots),$$

$$f_{2k}(t) = 2 \int_0^1 f(x,t) \sin \lambda_k x dx, \quad g_{2k}(t) = 2 \int_0^1 g(x,t) \sin \lambda_k x dx \quad (k=1,2,\dots),$$

$$\varphi_{2k} = 2 \int_0^1 \varphi(x) \sin \lambda_k x dx, \quad \psi_{2k} = 2 \int_0^1 \psi(x) \sin \lambda_k x dx \quad (k=1,2,\dots).$$

Далее, из (22)-(26) находим:

$$u_{10}(t) = \varphi_{10} + \int_0^T p_1(t)u_{10}(t)dt + t \left(\psi_{10} + \int_0^T p_2(t)u_{10}(t)dt \right) + \int_0^t (t-\tau)F_{10}(\tau; u, a, b)d\tau \quad (0 \leq t \leq T), \quad (27)$$

$$u_{ik}(t) = e^{\alpha_k t} \left[\left(\cos \beta_k t - \frac{\alpha_k}{\beta_k} \sin \beta_k t \right) \left(\varphi_{ik} + \int_0^T p_1(t)u_{ik}(t)dt \right) + \frac{\sin \beta_k t}{\beta_k} \left(\psi_{ik} + \int_0^T p_2(t)u_{ik}(t)dt \right) \right] + \frac{1}{\beta_k} \int_0^t F_{ik}(\tau; u, a, b) \sin \beta_k (t-\tau) e^{\alpha_k (t-\tau)} d\tau \quad (i=1,2; k=1,2,\dots; 0 \leq t \leq T), \quad (28)$$

где

$$\alpha_k = -\alpha \lambda_k^2, \quad \beta_k = \lambda_k^2 \sqrt{\beta - \alpha^2}.$$

После подстановки выражений $u_{1k}(t)$ ($k=0,1,\dots$) и $u_{2k}(t)$ ($k=1,2,\dots$) в (9), для определения компоненты $u(x,t)$ классического решения $\{u(x,t), a(t), b(t)\}$ задачи (1)-(3), (6), (7) получаем:

$$\begin{aligned}
u(x,t) = & \varphi_{10} + \int_0^T p_1(t)u_{10}(t)dt + t \left(\psi_{10} + \int_0^T p_2(t)u_{10}(t)dt \right) + \\
& + \int_0^t (t-\tau)F_{10}(\tau;u,a,b)d\tau + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ e^{\alpha_k t} \left[\left(\cos \beta_k t - \frac{\alpha_k}{\beta_k} \sin \beta_k t \right) \left(\varphi_{1k} + \int_0^T p_1(t)u_{1k}(t)dt \right) + \right. \right. \\
& + \left. \frac{\sin \beta_k t}{\beta_k} \left(\psi_{1k} + \int_0^T p_2(t)u_{1k}(t)dt \right) \right] + \frac{1}{\beta_k} \int_0^t F_{1k}(\tau;u,a,b) \sin \beta_k (t-\tau) e^{\alpha_k (t-\tau)} d\tau \left. \right\} \cos \lambda_k x + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ e^{\alpha_k t} \left[\left(\cos \beta_k t - \frac{\alpha_k}{\beta_k} \sin \beta_k t \right) \left(\varphi_{2k} + \int_0^T p_1(t)u_{2k}(t)dt \right) + \frac{\sin \beta_k t}{\beta_k} \left(\psi_{2k} + \int_0^T p_2(t)u_{2k}(t)dt \right) \right] + \right. \\
& \left. + \frac{1}{\beta_k} \int_0^t F_{2k}(\tau;u,a,b) \sin \beta_k (t-\tau) e^{\alpha_k (t-\tau)} d\tau \right\} \sin \lambda_k x \quad . \quad (29)
\end{aligned}$$

Теперь, из (9), с учетом (21), имеем:

$$\begin{aligned}
a(t) = & [h(t)]^{-1} \{ g(x_2, t)(h_1''(t) - f(x_1, t)) - g(x_1, t)(h_2''(t) - f(x_2, t)) + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 (2\alpha u'_{1k}(t) + \beta \lambda_k^2 u_{1k}(t)) (g(x_2, t) \cos \lambda_k x_1 - g(x_1, t) \cos \lambda_k x_2) + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 (2\alpha u'_{2k}(t) + \beta \lambda_k^2 u_{2k}(t)) (g(x_2, t) \sin \lambda_k x_1 - g(x_1, t) \sin \lambda_k x_2) \left. \right\}, \quad (30)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b(t) = & [h(t)]^{-1} \{ h_1(t)(h_2''(t) - f(x_2, t)) - h_2(t)(h_1''(t) - f(x_1, t)) + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 (2\alpha u'_{1k}(t) + \beta \lambda_k^2 u_{1k}(t)) (h_1(t) \cos \lambda_k x_2 - h_2(t) \cos \lambda_k x_1) + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 (2\alpha u'_{2k}(t) + \beta \lambda_k^2 u_{2k}(t)) (h_1(t) \sin \lambda_k x_2 - h_2(t) \sin \lambda_k x_1) \left. \right\}. \quad (31)
\end{aligned}$$

где

$$h(t) = h_1(t)g(x_2, t) - h_2(t)g(x_1, t) \neq 0,$$

Дифференцируя (28) получим:

$$\begin{aligned}
u'_{ik}(t) = & e^{\alpha_k t} \left[-\frac{1}{\beta_k} (\alpha_k^2 + \beta_k^2) \left(\varphi_{ik} + \int_0^T p_1(t)u_{ik}(t)dt \right) \sin \beta_k t + \right. \\
& + \left. \left(\frac{\alpha_k}{\beta_k} \sin \beta_k t + \cos \beta_k t \right) \left(\psi_{ik} + \int_0^T p_2(t)u_{ik}(t)dt \right) \right] +
\end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{\beta_k} \int_0^t F_{ik}(\tau; u, a, b) (\alpha_k \sin \beta_k (t - \tau) + \beta_k \cos \beta_k (t - \tau)) e^{\alpha_k (t - \tau)} d\tau \quad (i=1,2; 0 \leq t \leq T). \quad (32)$$

Далее, из (28) и (32), получаем:

$$\begin{aligned} & 2\alpha u'_{ik}(t) + \beta \lambda_k^2 u_{ik}(t) = \\ & = e^{\alpha_k t} \left[\left(\beta \lambda_k^2 \cos \beta_k t - \frac{1}{\beta_k} (\beta \lambda_k^2 \alpha_k + 2\alpha (\alpha_k^2 + \beta_k^2)) \sin \beta_k t \right) \left(\varphi_{ik} + \int_0^T p_1(t) u_{ik}(t) dt \right) + \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{1}{\beta_k} (\beta \lambda_k^2 + 2\alpha \alpha_k) \sin \beta_k t + 2\alpha \cos \beta_k t \right) \left(\psi_{ik} + \int_0^T p_2(t) u_{ik}(t) dt \right) \right] + \\ & + \frac{1}{\beta_k} \int_0^t F_{ik}(\tau; u, a, b) \left((2\alpha \alpha_k + \beta \lambda_k^2) \sin \beta_k (t - \tau) + 2\alpha \beta_k \cos \beta_k (t - \tau) \right) e^{\alpha_k (t - \tau)} d\tau \}. \quad (33) \end{aligned}$$

Тогда из (30), (31) с учетом (33), соответственно находим:

$$\begin{aligned} a(t) &= [h(t)]^{-1} \{ g(x_2, t) (h_1''(t) - f(x_1, t)) - g(x_1, t) (h_2''(t) - f(x_2, t)) + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \left\{ e^{\alpha_k t} \left[\left(\beta \lambda_k^2 \cos \beta_k t - \frac{1}{\beta_k} (\beta \lambda_k^2 \alpha_k + 2\alpha (\alpha_k^2 + \beta_k^2)) \sin \beta_k t \right) \left(\varphi_{1k} + \int_0^T p_1(t) u_{1k}(t) dt \right) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \left(\frac{1}{\beta_k} (\beta \lambda_k^2 + 2\alpha \alpha_k) \sin \beta_k t + 2\alpha \cos \beta_k t \right) \left(\psi_{1k} + \int_0^T p_2(t) u_{2k}(t) dt \right) \right] + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{\beta_k} \int_0^t F_{1k}(\tau; u, a, b) \left((2\alpha \alpha_k + \beta \lambda_k^2) \sin \beta_k (t - \tau) + 2\alpha \beta_k \cos \beta_k (t - \tau) \right) e^{\alpha_k (t - \tau)} d\tau \right\} \times \\ & \quad \times (g(x_2, t) \cos \lambda_k x_1 - g(x_1, t) \cos \lambda_k x_2) + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \left\{ e^{\alpha_k t} \left[\left(\beta \lambda_k^2 \cos \beta_k t - \frac{1}{\beta_k} (\beta \lambda_k^2 \alpha_k + 2\alpha (\alpha_k^2 + \beta_k^2)) \sin \beta_k t \right) \left(\varphi_{2k} + \int_0^T p_1(t) u_{2k}(t) dt \right) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \left(\frac{1}{\beta_k} (\beta \lambda_k^2 + 2\alpha \alpha_k) \sin \beta_k t + 2\alpha \cos \beta_k t \right) \left(\psi_{2k} + \int_0^T p_2(t) u_{2k}(t) dt \right) \right] + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{\beta_k} \int_0^t F_{2k}(\tau; u, a, b) \left((2\alpha \alpha_k + \beta \lambda_k^2) \sin \beta_k (t - \tau) + 2\alpha \beta_k \cos \beta_k (t - \tau) \right) e^{\alpha_k (t - \tau)} d\tau \right\} \times \\ & \quad \times (g(x_2, t) \sin \lambda_k x_1 - g(x_1, t) \sin \lambda_k x_2) \}, \quad (34) \\ b(t) &= [h(t)]^{-1} \{ h_1(t) (h_2''(t) - f(x_2, t)) - h_2(t) (h_1''(t) - f(x_1, t)) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \left\{ e^{\alpha_k t} \left[\left(\beta \lambda_k^2 \cos \beta_k t - \frac{1}{\beta_k} (\beta \lambda_k^2 \alpha_k + 2\alpha (\alpha_k^2 + \beta_k^2)) \sin \beta_k t \right) \left(\varphi_{1k} + \int_0^T p_1(t) u_{1k}(t) dt \right) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \left(\frac{1}{\beta_k} (\beta \lambda_k^2 + 2\alpha \alpha_k) \sin \beta_k t + 2\alpha \cos \beta_k t \right) \left(\psi_{1k} + \int_0^T p_2(t) u_{1k}(t) dt \right) \right] + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\beta_k} \int_0^t F_{1k}(\tau; u, a) \left((2\alpha \alpha_k + \beta \lambda_k^2) \sin \beta_k(t - \tau) + 2\alpha \beta_k \cos \beta_k(t - \tau) \right) e^{\alpha_k(t - \tau)} d\tau \right\} \times \\
& \quad \times (h_1(t) \cos \lambda_k x_2 - h_2(t) \cos \lambda_k x_1) + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \left\{ e^{\alpha_k t} \left[\left(\beta \lambda_k^2 \cos \beta_k t - \frac{1}{\beta_k} (\beta \lambda_k^2 \alpha_k + 2\alpha (\alpha_k^2 + \beta_k^2)) \sin \beta_k t \right) \left(\varphi_{2k} + \int_0^T p_1(t) u_{2k}(t) dt \right) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \left(\frac{1}{\beta_k} (\beta \lambda_k^2 + 2\alpha \alpha_k) \sin \beta_k t + 2\alpha \cos \beta_k t \right) \left(\psi_{2k} + \int_0^T p_2(t) u_{2k}(t) dt \right) \right] + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\beta_k} \int_0^t F_{2k}(\tau; u, a) \left((2\alpha \alpha_k + \beta \lambda_k^2) \sin \beta_k(t - \tau) + 2\alpha \beta_k \cos \beta_k(t - \tau) \right) e^{\alpha_k(t - \tau)} d\tau \right\} \times \\
& \quad \times (h_1(t) \sin \lambda_k x_2 - h_2(t) \sin \lambda_k x_1) \}. \quad (35)
\end{aligned}$$

Таким образом, решение задачи (1)-(3),(8),(9) сведено к решению системы (29), (34) ,(35) относительно неизвестных функций $u(x, t)$, $a(t)$ и $b(t)$.

Для изучения вопроса единственности решения задачи (1)-(3),(8),(9) важную роль играет следующая

Лемма 2. Если $\{u(x, t), a(t)\}$ - любое решение задачи (1)-(3),(6) ,(7), то функции

$$\begin{aligned}
u_{10}(t) &= \int_0^1 u(x, t) dx, u_{1k}(t) = 2 \int_0^1 u(x, t) \cos \lambda_k x dx \quad (k = 1, 2, \dots), \\
u_{2k}(t) &= 2 \int_0^1 u(x, t) \sin \lambda_k x dx \quad (k = 1, 2, \dots)
\end{aligned}$$

удовлетворяют системе (27), (28).

Замечание. Из леммы 2 следует, что для доказательства единственности решения задачи (1)-(3), (8), (9) достаточно доказать единственность решения системы (29), (34) ,(35).

Теперь рассмотрим следующие пространства:

Обозначим через $B_{2,T}^5$ [9], совокупность всех функций вида

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_{1k}(t) \cos \lambda_k x + \sum_{k=0}^{\infty} u_{2k}(t) \sin \lambda_k x \quad (\lambda_k = 2\pi k),$$

рассматриваемых в D_T , где каждая из функций $u_{1k}(t)$ ($k = 0, 1, \dots$) и $u_{2k}(t)$ ($k = 1, 2, \dots$) непрерывна на $[0, T]$ и

$$J_T(u) \equiv \|u_{10}(t)\|_{C[0, T]} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 \|u_{1k}(t)\|_{C[0, T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 \|u_{2k}(t)\|_{C[0, T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Норму в этом множестве определим так:

$$\|u(x, t)\|_{B_{2, T}^5} = J_T(u).$$

Через E_T^5 обозначим пространство $B_{2, T}^5 \times C[0, T] \times C[0, T]$ вектор-функций $z(x, t) = \{u(x, t), a(t), b(t)\}$ с нормой

$$\|z\|_{E_T^5} = \|u(x, t)\|_{B_{2, T}^5} + \|a(t)\|_{C[0, T]} + \|b(t)\|_{C[0, T]}.$$

Очевидно, что $B_{2, T}^5$ и E_T^5 являются банаховыми пространствами.

Теперь рассмотрим в пространстве E_T^5 оператор

$$\Phi(u, a, b) = \{\Phi_1(u, a, b), \Phi_2(u, a, b), \Phi_3(u, a, b)\},$$

где

$$\Phi_1(u, a, b) = \tilde{u}(x, t) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{u}_{1k}(t) \cos \lambda_k x + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_{2k}(t) \sin \lambda_k x,$$

$$\Phi_2(u, a, b) = \tilde{a}(t), \Phi_3(u, a, b) = \tilde{b}(t),$$

где $\tilde{u}_{i0}(t)$, $\tilde{u}_{ik}(t)$ ($i = 1, 2; k = 1, 2, \dots$), $\tilde{a}(t)$ и $\tilde{b}(t)$ равны соответственно правым частям (27), (28), (34) и (35).

Очевидно, что

$$\left| \cos \beta_k t - \frac{\alpha_k}{\beta_k} \sin \beta_k t \right| \leq 1 + \frac{\alpha}{\sqrt{\beta - \alpha^2}} \equiv \varepsilon_1,$$

$$\left| \frac{1}{\beta_k} \sin \beta_k t \right| \leq \frac{1}{\sqrt{\beta - \alpha^2}} \frac{1}{\lambda_k^2} \equiv \varepsilon_2 \frac{1}{\lambda_k^2},$$

$$\left| \beta \lambda_k^2 \cos \beta_k t - \frac{1}{\beta_k} (\beta \lambda_k^2 \alpha_k + 2\alpha(\alpha_k^2 + \beta_k^2)) \sin \beta_k t \right| \leq \left(\frac{3\alpha}{\sqrt{\beta - \alpha^2}} + 1 \right) \beta \lambda_k^2 \equiv \varepsilon_3 \lambda_k^2,$$

$$\left| \frac{1}{\beta_k} (\beta \lambda_k^2 + 2\alpha \alpha_k) \sin \beta_k t + 2\alpha \cos \beta_k t \right| \leq \frac{\beta + 2\alpha^2}{\sqrt{\beta - \alpha^2}} + 2\alpha \equiv \varepsilon_4.$$

$$\frac{1}{\beta_k} \left| (2\alpha \alpha_k + \beta \lambda_k^2) \sin \beta_k(t - \tau) + 2\alpha \beta_k \cos \beta_k(t - \tau) \right| \leq \varepsilon_4.$$

Тогда с помощью нетрудных преобразований находим:

$$\begin{aligned}
& \|\tilde{u}_{10}(t)\|_{C[0,T]} \leq |\varphi_{10}| + T|\psi_{10}| + T(\|p_1(t)\|_{C[0,T]} + T\|p_2(t)\|_{C[0,T]})\|u_{10}(t)\|_{C[0,T]} + \\
& + T\sqrt{T}\left(\int_0^T |f_{10}(\tau)|^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} + T^2\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u_{10}(t)\|_{C[0,T]} + T\sqrt{T}\|b(t)\|_{C[0,T]}\left(\int_0^T |g_{10}(\tau)|^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (36) \\
& \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 \|\tilde{u}_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{7}\varepsilon_1 \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 |\varphi_{ik}|)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{7}\varepsilon_1 \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |\psi_{ik}|)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \\
& + \sqrt{7}(\|p_1(t)\|_{C[0,T]} + \|p_2(t)\|_{C[0,T]})T \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|u_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}} + \varepsilon_1 \sqrt{7T} \left(\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |f_{ik}(\tau)|)^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} + \\
& + \sqrt{7}\varepsilon_1 T \|a(t)\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 \|u_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}} + \varepsilon_1 \sqrt{7T} \|b(t)\|_{C[0,T]} \left(\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |g_{ik}(\tau)|)^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \\
& (i=1,2), \quad (37)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]} & \leq \|[h(t)]^{-1}\|_{C[0,T]} \left\{ \|g(x_2, t)(h_1''(t) - f(x_1, t)) - g(x_1, t)(h_2''(t) - f(x_2, t))\|_{C[0,T]} + \right. \\
& + \|g(x_2, t) + |g(x_1, t)|\|_{C[0,T]} \left[\frac{\sqrt{6}}{12} \varepsilon_3 \sum_{i=1}^2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 |\varphi_{ik}|)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{6}}{12} \varepsilon_4 \sum_{i=1}^2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |\psi_{ik}|)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \right. \\
& + \frac{\sqrt{6}}{12} (\varepsilon_3 + \varepsilon_4) T \left(\|p_1(t)\|_{C[0,T]} + \|p_2(t)\|_{C[0,T]}\right) \sum_{i=1}^2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|u_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}} + \\
& + \frac{\sqrt{6T}}{12} \varepsilon_4 \sum_{i=1}^2 \left(\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |f_{ik}(\tau)|)^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{6}}{12} \varepsilon_4 T \|a(t)\|_{C[0,T]} \sum_{i=1}^2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 \|u_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}} + \\
& \left. \left. + \frac{\sqrt{6T}}{12} \varepsilon_4 \|b(t)\|_{C[0,T]} \sum_{i=1}^2 \left(\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |g_{ik}(\tau)|)^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \right] \right\}, \quad (38)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|\tilde{b}(t)\|_{C[0,T]} & \leq \|[h(t)]^{-1}\|_{C[0,T]} \left\{ \|h_1(t)(h_2''(t) - f(x_2, t)) - h_2(t)(h_1''(t) - f(x_1, t))\|_{C[0,T]} + \right. \\
& + \|h_2(t) + |h_1(t)|\|_{C[0,T]} \left[\frac{\sqrt{6}}{12} \varepsilon_3 \sum_{i=1}^2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 |\varphi_{ik}|)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{6}}{12} \varepsilon_4 \sum_{i=1}^2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |\psi_{ik}|)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \right. \\
& + \frac{\sqrt{6}}{12} (\varepsilon_3 + \varepsilon_4) T \left(\|p_1(t)\|_{C[0,T]} + \|p_2(t)\|_{C[0,T]}\right) \sum_{i=1}^2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|u_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\sqrt{6T}}{12} \varepsilon_4 \sum_{i=1}^2 \left(\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |f_{ik}(\tau)|)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{6}}{12} \varepsilon_4 T \|a(t)\|_{C[0,T]} \sum_{i=1}^2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 \|u_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \\
& \left. + \frac{\sqrt{6T}}{12} \varepsilon_4 \|b(t)\|_{C[0,T]} \sum_{i=1}^2 \left(\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |g_{ik}(\tau)|)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \cdot \quad (39)
\end{aligned}$$

Предположим, что данные задачи (1)-(3),(8) ,(9) удовлетворяют следующим условиям:

1. $\varphi(x) \in C^4[0,1]$, $\varphi^{(5)}(x) \in L_2(0,1)$ и
 $\varphi(0) = \varphi(1)$, $\varphi'(0) = \varphi'(1)$, $\varphi''(0) = \varphi''(1)$, $\varphi'''(0) = \varphi'''(1)$, $\varphi^{(4)}(0) = \varphi^{(4)}(1)$.
2. $\psi(x) \in C^2[0,1]$, $\psi^{(3)}(x) \in L_2(0,1)$ и $\psi(0) = \psi(1)$, $\psi'(0) = \psi'(1)$, $\psi''(0) = \psi''(1)$.
3. $f(x,t)$, $f_x(x,t)$, $f_{xx}(x,t) \in C(D_T)$, $f_{xxx}(x,t) \in L_2(D_T)$
и $f(0,t) = f(1,t)$, $f_x(0,t) = f_x(1,t)$, $f_{xx}(0,t) = f_{xx}(1,t)$ ($0 \leq t \leq T$).
4. $g(x,t)$, $g_x(x,t)$, $g_{xx}(x,t) \in C(D_T)$, $g_{xxx}(x,t) \in L_2(D_T)$
и $g(0,t) = g(1,t)$, $g_x(0,t) = g_x(1,t)$, $g_{xx}(0,t) = g_{xx}(1,t)$ ($0 \leq t \leq T$).
5. $h_i(t) \in C^2[0,T]$ ($i=1,2$), $h(t) = h_1(t)g(x_2,t) - h_2(t)g(x_1,t) \neq 0$,
 $p_i(t) \in C[0,T]$ ($i=1,2$) ($0 \leq t \leq T$).

Тогда из (36)- (39) получаем:

$$\|\tilde{u}(x,t)\|_{B_{2,T}^5} \leq A_1(T) + B_1(T)\|a(t)\|_{C[0,T]} \|u(x,t)\|_{B_{2,T}^5} + C_1(T)\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^5} + D_1(T)\|b(t)\|_{C[0,T]}, \quad (40)$$

$$\|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]} \leq A_2(T) + B_2(T)\|a(t)\|_{C[0,T]} \|u(x,t)\|_{B_{2,T}^5} + C_2(T)\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^5} + D_2(T)\|b(t)\|_{C[0,T]}, \quad (41)$$

$$\|\tilde{b}(t)\|_{C[0,T]} \leq A_3(T) + B_3(T)\|a(t)\|_{C[0,T]} \|u(x,t)\|_{B_{2,T}^5} + C_3(T)\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^5} + D_3(T)\|b(t)\|_{C[0,T]}. \quad (42)$$

где

$$\begin{aligned}
A_1(T) = & \|\varphi(x)\|_{L_2(0,1)} + T\|\psi(x)\|_{L_2(0,1)} + T\sqrt{T}\|f(x,t)\|_{L_2(D_T)} + 2\sqrt{7}\varepsilon_1\|\varphi^{(5)}(x)\|_{L_2(0,1)} + \\
& + 2\sqrt{7}\varepsilon_2\|\psi^{(3)}(x)\|_{L_2(0,1)} + 2\varepsilon_2\sqrt{7T}\|f_{xxx}(x,t)\|_{L_2(D_T)},
\end{aligned}$$

$$B_1(T) = (T + 2\sqrt{7}\varepsilon_2)T,$$

$$C_1(T) = T(1 + 2\sqrt{7})\|p_1(t)\|_{C[0,T]} + T(T + 2\sqrt{7})\|p_2(t)\|_{C[0,T]},$$

$$D_1(T) = (T + 2\varepsilon_2)\sqrt{5T}\|g_{xxx}(x,t)\|_{L_2(D_T)},$$

$$A_2(T) = \|[h(t)]^{-1}\|_{C[0,T]} \left\{ \|g(x_2,t)(h_1''(t) - f(x_1,t)) - g(x_1,t)(h_2''(t) - f(x_2,t))\|_{C[0,T]} + \right.$$

$$+ \left\| |g(x_2, t)| + |g(x_1, t)| \right\|_{C[0, T]} \left[\frac{\sqrt{6}}{6} \varepsilon_3 \left\| \varphi^{(5)}(x) \right\|_{L_2(0,1)} + \frac{\sqrt{6}}{6} \varepsilon_3 \left\| \psi'''(x) \right\|_{L_2(0,1)} + \frac{\sqrt{6T}}{6} \varepsilon_4 \left\| f_{xxx}(x, t) \right\|_{L_2(D_T)} \right],$$

$$B_2(T) = \frac{\sqrt{6}}{12} \varepsilon_4 \left\| [h(t)]^{-1} \right\|_{C[0, T]} \left\| |g(x_2, t)| + |g(x_1, t)| \right\|_{C[0, T]} T,$$

$$C_2(T) = \frac{\sqrt{6}}{6} (\varepsilon_4 + \varepsilon_3) \left\| [h(t)]^{-1} \right\|_{C[0, T]} \left\| |g(x_2, t)| + |g(x_1, t)| \right\|_{C[0, T]} T \left(\left\| p_1(t) \right\|_{C[0, T]} + \left\| p_2(t) \right\|_{C[0, T]} \right),$$

$$D_2(T) = \frac{\sqrt{6T}}{6} \varepsilon_4 \left\| [h(t)]^{-1} \right\|_{C[0, T]} \left\| |g(x_2, t)| + |g(x_1, t)| \right\|_{C[0, T]} \left\| g_{xxx}(x, t) \right\|_{L_2(D_T)},$$

$$A_3(T) = \left\| [h(t)]^{-1} \right\|_{C[0, T]} \left\{ \left\| h_1(t)(h_2''(t) - f(x_2, t)) - h_2(t)(h_1''(t) - f(x_1, t)) \right\|_{C[0, T]} + \left\| |h_2(t)| + |h_1(t)| \right\|_{C[0, T]} \left[\frac{\sqrt{6}}{6} \varepsilon_3 \left\| \varphi^{(5)}(x) \right\|_{L_2(0,1)} + \frac{\sqrt{6}}{6} \varepsilon_3 \left\| \psi'''(x) \right\|_{L_2(0,1)} + \frac{\sqrt{6T}}{6} \varepsilon_4 \left\| f_{xxx}(x, t) \right\|_{L_2(D_T)} \right] \right\},$$

$$B_3(T) = \frac{\sqrt{6}}{12} \varepsilon_4 \left\| [h(t)]^{-1} \right\|_{C[0, T]} \left\| |h_2(t)| + |h_1(t)| \right\|_{C[0, T]} T,$$

$$C_3(T) = \frac{\sqrt{6}}{6} (\varepsilon_4 + \varepsilon_3) \left\| [h(t)]^{-1} \right\|_{C[0, T]} \left\| |h_2(t)| + |h_1(t)| \right\|_{C[0, T]} T \left(\left\| p_1(t) \right\|_{C[0, T]} + \left\| p_2(t) \right\|_{C[0, T]} \right),$$

$$D_3(T) = \frac{\sqrt{6T}}{6} \varepsilon_4 \left\| [h(t)]^{-1} \right\|_{C[0, T]} \left\| |h_2(t)| + |h_1(t)| \right\|_{C[0, T]} \left\| g_{xxx}(x, t) \right\|_{L_2(D_T)}.$$

Из неравенств (40)-(42) заключаем:

$$\begin{aligned} & \left\| \tilde{u}(x, t) \right\|_{B_{2,T}^5} + \left\| \tilde{a}(t) \right\|_{C[0, T]} + \left\| \tilde{b}(t) \right\|_{C[0, T]} \leq \\ & \leq A(T) + B(T) \left\| a(t) \right\|_{C[0, T]} \left\| u(x, t) \right\|_{B_{2,T}^5} + C(T) \left\| u(x, t) \right\|_{B_{2,T}^5} + D(T) \left\| b(t) \right\|_{C[0, T]}, \end{aligned} \quad (43)$$

где

$$A(T) = A_1(T) + A_2(T) + A_3(T), \quad B(T) = B_1(T) + B_2(T) + B_3(T),$$

$$C(T) = C_1(T) + C_2(T) + C_3(T), \quad D(T) = D_1(T) + D_2(T) + D_3(T).$$

Итак, можно доказать следующую теорему.

Теорема 2. Пусть выполнены условия 1-5 и

$$(B(T)((A(T) + 2) + C(T) + D(T))(A(T) + 2) < 1. \quad (44)$$

Тогда задача (1)-(3),(8),(9) имеет в шаре $K = K_R (\|z\|_{E_T^5} \leq R = A(T) + 2)$ из E_T^5 единственное решение.

Доказательство. В пространстве E_T^5 рассмотрим уравнение

$$z = \Phi z, \quad (45)$$

где $z = \{u, a, b\}$, а компоненты Φ_i ($i = 1, 2, 3$) оператора $\Phi(u, a, b)$ определены правыми частями (29), (34), (35) соответственно.

Рассмотрим, оператор $\Phi(u, a, b)$ в шаре $K = K_R$ из E_T^5 . Аналогично (43) получаем, что для любых $z, z_1, z_2 \in K_R$ справедливы оценки:

$$\|\Phi z\|_{E_T^5} \leq A(T) + B(T)\|a(t)\|_{C[0,T]} \|u(x,t)\|_{B_{2,T}^5} + C(T)\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^5} + D(T)\|b(t)\|_{C[0,T]} \leq A(T) + B(T)R^2 + C(T)R + D(T)R = A(T) + (B(T)((A(T) + 2) + C(T) + D(T))(A(T) + 2)), \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \|\Phi z_1 - \Phi z_2\|_{E_T^5} &\leq B(T)R(\|a_1(t) - a_2(t)\|_{C[0,T]} + \|u_1(x,t) - u_2(x,t)\|_{B_{2,T}^5}) + \\ &+ C(T)\|u_1(x,t) - u_2(x,t)\|_{B_{2,T}^5} + D(T)\|b_1(t) - b_2(t)\|_{C[0,T]}. \end{aligned} \quad (47)$$

Тогда из оценок (46) и (47), с учетом (44), следует, что оператор Φ действует в шаре $K = K_R$ и является сжимающим. Поэтому в шаре $K = K_R$ оператор Φ имеет единственную неподвижную точку $\{u, a, b\}$, которая является единственным в шаре $K = K_R$ решением (35), т.е. является единственным в шаре $K = K_R$ решением системы (29), (34), (35).

Функция $u(x, t)$, как элемент пространства $B_{2,T}^5$, непрерывна и имеет непрерывные производные $u_x(x, t), u_{xx}(x, t), u_{xxx}(x, t), u_{xxxx}(x, t)$ в D_T .

Аналогично [11].можно доказывает, что $u_i(x, t), u_{ix}(x, t), u_{ixx}(x, t), u_{ii}(x, t)$ непрерывны в D_T .

Легко проверить, что уравнение (1) и условия (2), (3), (8) и (9) удовлетворяются в обычном смысле. Значит, $\{u(x, t), a(t), b(t)\}$ является классическим решением задачи (1)-(3),(8), (9) и в силу леммы 2 это решение единственно. Теорема доказана.

С помощью теоремы 1, легко доказывается следующая

Теорема 3. Пусть выполнены все условия теоремы 1 и

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x, t) dx = 0, \int_0^1 g(x, t) dx = 0 \quad (0 \leq t \leq T), \int_0^1 \varphi(x) dx = 0, \int_0^1 \psi(x) dx = 0, \\ \varphi(x_i) + \int_0^T p_1(t) h_i(t) dt = h_i(0), \psi(x_i) + \int_0^T p_2(t) h_i(t) dt = h_i'(0) \quad (i = 1, 2). \end{aligned}$$

Тогда задача (1)-(5) имеет в шаре $K = K_R (\|z\|_{E_T^5} \leq R = A(T) + 2)$ из E_T^5 единственное классическое решение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А.А. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения, 1980, т.16, №11, с.1925-1935.
2. Cannon J. R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy // Quart. Appl. Math., 1963, v.5, 21, p.155-160.
3. Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференциальные уравнения, 1977, т.13, №2, с.294-304.
4. Нахушев А.М. Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приближения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод // Дифференциальные уравнения, 1982, т.18, №1, с.72-81.
5. Boussinesq J. Theorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de surface au fond//J. Math. Pures Appl. 1872. V. 17. P. 55—108.
6. Varlamov V.V. Asymptotic behavior of solutions of the damped Boussinesq equation in two space dimensions // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. 1999. Vol. 22. Issue 1. P. 131–145. DOI: 10.1155/S016117129922131X 7
7. Z.Y., Xie F.D., Zhang H.Q. Symmetry reductions, integrability and solitary wave solutions to high order modified Boussinesq equations with damping term // Communications in Theoretical Physics. 2001. Vol. 36. No. 1. P. 1–6. DOI: 10.1088/0253-6102/36/1/1
8. Я. Т. Мегралиев, Ф. Х. Ализаде, “Обратная краевая задача для одного уравнения Буссинеска четвертого порядка с нелокальными интегральными по времени условиями второго рода”, Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки, 26:4 (2016), 503–514
9. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихов А.Н. Сборник задач по математической физике. М.: Наука, 1972, 668 с.
10. Худавердиев К.И., Велиев А.А. Исследование одномерной смешанной задачи для одного класса псевдогоперболических уравнений третьего порядка с нелинейной операторной правой частью, Баку: Чашыоглы, 2010, 168 с.
11. Я. Т. Мегралиев, Ф. Х. Ализаде, “Обратная краевая задача для одного уравнения Буссинеска четвертого порядка с интегральным условием”, Чебышевский сб., 14:4 2013, т.14. в.4. с. 167–179 .

QEYRİ-LOKAL SƏRTLƏRLİ BİR DÖRD TƏRTİBLİ BUSSİNESK TƏNLIYI ÜÇÜN QEYRİ-XƏTTİ TƏRS SƏRHƏD MƏSƏLƏSİNİN HƏLL OLUNMASI HAQQINDA

Y.T.MEHRƏLİYEV, F.H.ALİZADƏ

XÜLASƏ

Qeyri-lokal şərtlərli bir dörd tərtibli Bussinesk tənliyi üçün qeyri-xətti tərs sərhəd məsələsi tədqiq olunur. Məsələyə düzbucaqlı oblastda baxılır. Verilmiş tərs sərhəd məsələsinin həlli köməkçi tərs məsələyə gətirilir. Sıxılmış inikas prinsipinin köməyi ilə köməkçi məsələnin həllinin varlıq və yeganəliyi isbat olunur. Daha sonra isə verilmiş tərs məsələnin həllinin varlıq və yeganəliyi isbat olunur.

Açar sözlər: tərs sərhəd məsələsi, Bussinesk tənliyi, Furey metodu, klassik həll.

**ON THE SOLVABILITY OF A NONLINEAR INVERSE BOUNDARY VALUE
PROBLEM FOR A SINGLE FOURTH-ORDER BUSSINSK EQUATION WITH
NONLOCAL CONDITIONS**

Y.T.MEHRALIYEV, F.Kh.ALIZADE

SUMMARY

An nonlinear inverse boundary value problem for one fourth-order Boussinski equation with nonlocal conditions is investigated. The problem is considered in a rectangular domain. To investigate the solvability of the inverse problem, we perform a conversion from the original problem to some auxiliary inverse problem with trivial boundary conditions. By the contraction mapping principle we prove the existence and uniqueness of solutions of the auxiliary problem. Then we make a conversion to the stated problem again and, as a result, we obtain the solvability of the inverse problem.

Key words: inverse boundary value problem, Boussinesq equation, Fourier method, classical solution

**KƏSR TƏRTİBLİ 2α TƏRTİBDƏN İNTEQRO-DİFFERENSİAL
TƏNLİK ÜÇÜN ÜÇ NÖQTƏLİ SƏRHƏD MƏSƏLƏSİ****N.Ə.ƏLİYEV, V.Ə.OSMANOV***Bakı Dövlət Universiteti**Saracli@mail.ru*

Baxılan işdə kəsr tərtib adi, 2α tərtibdən xətti inteqro-differensial tənlik üçün üç nöqtəli sərhəd məsələsinə baxılmışdır. Bu məsələ özü həm Volterra, həm də Fredholm hədlı ikinci növ requlyar nüvəli inteqral tənliyə gətirilmişdir.

Bu cür tənliklərin araşdırılması isə ardıcıl yerinə yazma üsuludur. Belə ki, bu üsul bütün hədlərdə aparılırsa, proses mürəkkəbləşər. Ona görə də ardıcıl yerinə yazma üsulu ancaq Volterra həddində aparılmaqla bu həddin nüvəsi istənilən qədər kiçik edilə bildiyindən, bu hədd xəta kimi atılır və alınan ikinci növ Fredholm tənliyi üçün Rezolvent sırası qurulur.

Açar sözlər: Üç nöqtəli məsələ, Sərhəd məsələsi, İnteqro-differensial tənlik, Kəsr tərtibli tənlik

Burada 2α tərtibdən kəsr tərtibli inteqro-differensial tənlik üçün üç nöqtəli sərhəd məsələsinə baxılır. Bu məsələnin həllində Riman-Liuvill mənada kəsr tərtibdən inteqrallamadan istifadə olunur. Məsələni həll edərəkən, məsələ ikinci növ, requlyar nüvəli Volterra-Fredholm hədlı inteqral tənliyə gətirilir. Volterra-Fredholm tipli inteqral tənliyi həll etmək üçün təqribi hesablama üsulu olan ardıcıl yerinə yazma üsulundan istifadə olunur. Bu üsulu bütün hədlərdə aparsaq məsələ mürəkkəbləşər. Ona görə iteraiya üsulunu ancaq Volterra həddində aparmaqla bu həddi kifayət qədər kiçiltmək mümkündür. Və sonda bu həddi xəta kimi qəbul edərək atılır və alınan ikinci növ Fredholm tənliyi üçün Rezolvent sırası qurulur. Alınan həll təqribi həll kimi qəbul olunur.

Məlumdur ki, adi differensial tənliklər üçün baxılan sərhəd məsələlərinin araşdırılması çox zaman bu məsələləri ikinci növ inteqral tənliyə gətirməklə aparılır [1], [2]. Bəzən bu cür məsələlər Y.Məmmədovun araşdırdığı ikinci növ volterra-Fredholm tipli inteqral tənliyə gətirilərk araşdırırlar [3], [4]. Biz burada törəməsi kəsr tərtibdən olan adi inteqro-differensial tənlik üçün qoyulmuş üç nöqtəli sərhəd məsələsini özündə həm Volterra, həm də Fredholm hədləri tutan ikinci növ inteqral tənliyə gətirməklə kifayətlənmişik.

Bu cür tənliklərin araşdırılması isə ardıcıl yerinə yazma üsuludur. Belə ki, bu üsul bütün hədlərdə aparılırsa, proses mürəkkəbləşər. Ona görə də ardıcıl yerinə yazma üsulu ancaq Volterra həddində aparılmaqla bu həddin nü-

vəsi istənilən qədər kiçik edilə bildiyindən, bu hədd xəta kimi atılır və alınan ikinci növ Fredholm tənliyi üçün rezolvent sırası qurulur.

Məsələnin qoyuluşu: Aşağıdakı kimi α tərtibdən kəsir tərtibli inteqro-diferensial tənliyə baxılır. Bu tənliyi həll etmək üçün əvvəlcə tənlik hər iki tərəfdən Riman-Liuvill mənadada inteqrallanır. Bu məsələnin həlli zamanı Dirakın-Delta funksiyasından istifadə olunur.

$$D^{2\alpha}y(x) + a_1D^\alpha y(x) + a_2y(x) + \int_{x_0}^x K(x,t)y(t)dt = 0, \quad 0 < x_0 < x_1 \ll x_2 \quad (1)$$

$$\begin{cases} \alpha_{11}^{(1)}D^\alpha y(x) \Big|_{x=x_0} + \alpha_{12}^{(1)}D^\alpha y(x) \Big|_{x=x_1} + \alpha_{13}^{(1)}D^\alpha y(x) \Big|_{x=x_2} + \\ \quad + \alpha_{11}^{(0)}y(x_0) + \alpha_{12}^{(0)}y(x_1) + \alpha_{13}^{(0)}y(x_2) = \alpha_1 \\ \alpha_{21}^{(1)}D^\alpha y(x) \Big|_{x=x_0} + \alpha_{22}^{(1)}D^\alpha y(x) \Big|_{x=x_1} + \alpha_{23}^{(1)}D^\alpha y(x) \Big|_{x=x_2} + \\ \quad + \alpha_{21}^{(0)}y(x_0) + \alpha_{22}^{(0)}y(x_1) + \alpha_{23}^{(0)}y(x_2) = \alpha_2 \end{cases} \quad (2)$$

$$I_{x_0}^\alpha D_{x_0}^{2\alpha}y(x) + a_1I_{x_0}^\alpha D^\alpha y(x) + a_2I_{x_0}^\alpha y(x) + I_{x_0}^\alpha \int_{x_0}^x K(x,t)y(t)dt = 0 \quad (3)$$

$$D^\alpha y(x) + C_1 \frac{x^{-1+\alpha}}{(-1+\alpha)!} + a_1y(x) + a_1C_2 \frac{x^{-1+\alpha}}{(-1+\alpha)!} + a_2 \int_{x_0}^x \frac{(x-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} y(\xi)d\xi \\ + \int_{x_0}^x \frac{(x-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} d\xi \int_{x_0}^\xi K(\xi,t)y(t)dt = 0 \quad (4)$$

$$D^\alpha y(x) + C_1 \frac{x^{-1+\alpha}}{(-1+\alpha)!} + a_1y(x) + \\ + a_1C_2 \frac{x^{-1+\alpha}}{(-1+\alpha)!} + a_2 \int_{x_0}^x \frac{(x-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} y(\xi)d\xi \\ + \int_{x_0}^x y(t)dt \int_t^x \frac{(x-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} K(\xi,t)y(\xi)d\xi = 0 \quad (5)$$

X-in yerinə x_0 yazsaq və 1-ci həddən başqa qalan hədləri bərabərliyin sağ tərəfinə keçirsək alırıq:

$$D^\alpha y(x) \Big|_{x=x_0} = -C_1 \frac{x_0^{-1+\alpha}}{(-1+\alpha)!} - a_1y(x_0) - \\ - a_1C_2 \frac{x_0^{-1+\alpha}}{(-1+\alpha)!} - a_2 \int_{x_0}^{x_0} \frac{(x_0-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} y(\xi)d\xi \\ - \int_{x_0}^{x_0} y(t)dt \int_t^{x_0} \frac{(x_0-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} K(\xi,t)y(\xi)d\xi = 0 \quad (6)$$

Burada sonucu iki hədd 0 olur, onda alarıq:

$$D^\alpha y(x) \Big|_{x=x_0} = -C_1 \frac{x_0^{-1+\alpha}}{(-1+\alpha)!} - a_1 y(x_0) - a_1 C_2 \frac{x_0^{-1+\alpha}}{(-1+\alpha)!} \quad (7)$$

İndi isə x -in yerinə x_1 yazsaq, alarıq:

$$\begin{aligned} D^\alpha y(x) \Big|_{x=x_1} &= -C_1 \frac{x_1^{-1+\alpha}}{(-1+\alpha)!} - a_1 y(x_1) - \\ &- a_1 C_2 \frac{x_1^{-1+\alpha}}{(-1+\alpha)!} - a_2 \int_{x_0}^{x_1} \frac{(x_1 - \xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} y(\xi) d\xi \\ &- \int_{x_0}^{x_1} y(t) dt \int_t^{x_1} \frac{(x_1 - \xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} K(\xi, t) y(\xi) d\xi = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Daha sonra isə isə x -in yerinə x_2 yazaq:

$$\begin{aligned} D^\alpha y(x) \Big|_{x=x_2} &= -C_1 \frac{x_2^{-1+\alpha}}{(-1+\alpha)!} - a_1 y(x_2) - \\ &- a_1 C_2 \frac{x_2^{-1+\alpha}}{(-1+\alpha)!} - a_2 \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x_2 - \xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} y(\xi) d\xi \\ &- \int_{x_0}^{x_2} y(t) dt \int_t^{x_2} \frac{(x_2 - \xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} K(\xi, t) y(\xi) d\xi = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

(5)-dən alarıq:

$$\begin{aligned} I_{x_0}^\alpha D^\alpha y(x) + C_1 I_{x_0}^\alpha \frac{x^{-1+\alpha}}{(-1+\alpha)!} + a_1 I_{x_0}^\alpha y(x) + \\ + a_1 C_2 I_{x_0}^\alpha \frac{x^{-1+\alpha}}{(-1+\alpha)!} + a_2 I_{x_0}^\alpha \int_{x_0}^x \frac{(x - \xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} y(\xi) d\xi \\ + I_{x_0}^\alpha \int_{x_0}^x y(t) dt \int_t^x \frac{(x - \xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} K(\xi, t) y(\xi) d\xi = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} y(x) + C_2 \frac{x^{-1+\alpha}}{(-1+\alpha)!} + C_1 \int_{x_0}^x \frac{(x - \xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} \frac{\xi^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} d\xi + a_1 \int_{x_0}^x \frac{(x - \xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} y(\xi) d\xi \\ + a_1 C_2 \int_{x_0}^x \frac{(x - \xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} \frac{\xi^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} d\xi \\ + a_2 \int_{x_0}^x \frac{(x - \tau)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} d\tau \int_{x_0}^\tau \frac{(x - \xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} y(\xi) d\xi \\ + \int_{x_0}^x \frac{(x - \tau)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} d\tau \int_{x_0}^\tau y(t) dt \int_t^x \frac{(x - \xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} K(\xi, t) d\xi = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
y(x_0) = & -C_2 \frac{x_0^{-1+\alpha}}{(-1+\alpha)!} - C_1 \int_{x_0}^{x_0} \frac{(x_0-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} \frac{\xi^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} d\xi \\
& - a_1 \int_{x_0}^{x_0} \frac{(x_0-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} y(\xi) d\xi - C_2 \int_{x_0}^{x_0} \frac{(x_0-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} \frac{\xi^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} d\xi \\
& - a_2 \int_{x_0}^{x_0} \frac{(x_0-\tau)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} d\tau \int_{x_0}^{\tau} \frac{(x_0-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} y(\xi) d\xi \\
& - \int_{x_0}^{x_0} \frac{(x_0-\tau)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} d\tau \int_{x_0}^{\xi} y(t) dt \int_t^x \frac{(x_0-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} K(\xi, t) d\xi \quad (12)
\end{aligned}$$

Burada da sonuncu iki hëdd sıfır olur. Onda alarıq:

$$y(x_0) = -C_2 \frac{x_0^{-1+\alpha}}{(-1+\alpha)!} \quad (13)$$

$$\begin{aligned}
y(x_1) = & -C_2 \frac{x_1^{-1+\alpha}}{(-1+\alpha)!} - C_1 \int_{x_0}^{x_1} \frac{(x_1-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} \frac{\xi^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} d\xi \\
& - a_1 \int_{x_0}^{x_1} \frac{(x_1-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} y(\xi) d\xi - C_2 \int_{x_0}^{x_1} \frac{(x_1-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} \frac{\xi^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} d\xi \\
& - a_2 \int_{x_0}^{x_1} \frac{(x_1-\tau)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} d\tau \int_{x_0}^{\tau} \frac{(x_1-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} y(\xi) d\xi \\
& - \int_{x_0}^{x_1} \frac{(x_1-\tau)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} d\tau \int_{x_0}^{\xi} y(t) dt \int_t^{x_1} \frac{(x_1-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} K(\xi, t) d\xi \quad (14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y(x_2) = & -C_2 \frac{x_2^{-1+\alpha}}{(-1+\alpha)!} - C_1 \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x_2-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} \frac{\xi^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} d\xi \\
& - a_1 \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x_2-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} y(\xi) d\xi - C_2 \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x_2-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} \frac{\xi^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} d\xi \\
& - a_2 \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x_2-\tau)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} d\tau \int_{x_0}^{\tau} \frac{(x_2-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} y(\xi) d\xi \\
& - \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x_2-\tau)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} d\tau \int_{x_0}^{\xi} y(t) dt \int_t^{x_2} \frac{(x_2-\xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} K(\xi, t) d\xi \quad (15)
\end{aligned}$$

İndi $y(x_0), y(x_1), y(x_2)$ üçün alınmış ifadələri sərhəd şərtlərindən birincisində yerinə yerinə yazaraq:

$$\begin{aligned}
& \alpha_{11}^{(1)} \left[-C_1 \frac{x_0^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} - a_1 y(x_0) - a_1 C_2 \frac{x_0^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} \right] + \alpha_{12}^{(1)} \left[-C_1 \frac{x_1^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} - a_1 y(x_1) \right. \\
& \quad - a_1 C_2 \frac{x_1^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} - a_2 \int_{x_0}^{x_1} \frac{(x_1 - \xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} y(\xi) d\xi \\
& \quad - \int_{x_0}^{x_1} y(t) dt \int_t^{x_1} \frac{(x_1 - \xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} K(\xi, t) d\xi \left. \right] + \alpha_{13}^{(1)} \left[-C_1 \frac{x_2^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} \right. \\
& \quad - a_1 y(x_2) - a_1 C_2 \frac{x_2^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} - a_2 \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x_2 - \xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} y(\xi) d\xi \\
& \quad - \int_{x_0}^{x_2} y(t) dt \int_t^{x_1} \frac{(x_1 - \xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} K(\xi, t) d\xi \left. \right] + \alpha_{11}^{(0)} \left[-C_2 \frac{x_0^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} \right] \\
& \quad + \alpha_{12}^{(0)} \left[-C_2 \frac{x_1^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} - C_1 \int_{x_0}^{x_1} \frac{(x_1 - t)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} * \frac{\xi^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} d\xi \right. \\
& \quad - a_1 \int_{x_0}^{x_1} \frac{(x_1 - \xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} y(\xi) d\xi - a_1 C_2 \int_{x_0}^{x_1} \frac{(x_1 - \xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} * \frac{\xi^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} d\xi \\
& \quad - a_2 \int_{x_0}^{x_1} \frac{(x_1 - \tau)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} d\tau \int_{x_0}^{\tau} \frac{(x_1 - \xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} y(\xi) d\xi \\
& \quad - \int_{x_0}^{x_1} \frac{(x_1 - \tau)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} d\tau \int_{x_0}^{\tau} y(t) dt \int_t^{\tau} \frac{(x_1 - \xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} K(\xi, t) d\xi \left. \right] \\
& \quad + \alpha_{13}^{(0)} \left[-C_2 \frac{x_1^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} - C_1 \int_{x_0}^{x_1} \frac{(x_1 - t)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} * \frac{\xi^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} d\xi \right. \\
& \quad - a_1 \int_{x_0}^{x_1} \frac{(x_1 - \xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} y(\xi) d\xi - a_1 C_2 \int_{x_0}^{x_1} \frac{(x_1 - \xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} * \frac{\xi^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} d\xi \\
& \quad - a_2 \int_{x_0}^{x_1} \frac{(x_1 - \tau)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} d\tau \int_{x_0}^{\tau} \frac{(x_1 - \xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} y(\xi) d\xi \\
& \quad - \int_{x_0}^{x_1} \frac{(x_1 - \tau)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} d\tau \int_{x_0}^{\tau} y(t) dt \int_t^{\tau} \frac{(x_1 - \xi)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} K(\xi, t) d\xi \left. \right] = \alpha_1
\end{aligned}$$

Analoji olaraq ikinci sərhəd şərtində də həmin ifadələri yerinə yazmaqla aşağıdakı kimi cəbri tənliklər sistemi almış olarıq:

$$\begin{cases} \Delta_{11}C_1 + \Delta_{12}C_2 = \Delta_1 \\ \Delta_{21}C_1 + \Delta_{22}C_2 = \Delta_2 \end{cases}$$

Burada $\Delta = \begin{vmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ olduqda cəbri tənliklər sistemindən C_1 və C_2 sabitlərini tapıb (11) ifadəsində yerinə yazmaqla verilmiş bircins, kəsr tərtibli, üç nöqtəli sərhəd məsələsinin həllini almış olarıq.

Beləliklə qoyulmuş kəsr tərtibli inteqro-differensial tənlik üçün üç nöqtəli sərhəd məsələsi Volterra və Fredholm həddli ikinci növ inteqral tənliyə gətirilmiş oldu.

Teorem1: Əgər $\alpha \in (0,1)$, a, a_1, b_1 və c_1 verilmiş sabit ədədlər olmaqla, $0 < x_0 < x_1 < x_2$, $K(x, t)$ və $f(x)$ verilmiş kəsilməz funksiyalardır, onda (1)-(2) sərhəd məsələsi (10) ikinci növ inteqral tənliyə gətirilir.

Qeyd. Alınmış (10) inteqral tənliyində Volterra həddinə nəzərən iterasiyalar aparmaqla bu həddin nüvəsini kifayət qədər kiçiltmək mümkündür. Onda bu həddi xəta kimi qəbul etməklə alınan ikinci növ Fredholm tipli inteqral tənlik həll olunur. Bu cür alınmış həll qoyulmuş məsələnin təqribi həlli kimi qəbul edilə bilər.

ƏDƏBİYYAT

1. Дезин.А.А., Общие вопросы теории граничных задач. М.: Наука, 1980, 208 с.
2. Ловитт У.В., Линейные интегральные уравнения ГИТТЛ., М., 1957, 268 с.
3. Мəmmədov Y.C. Тəqribi hesablamə üsulları. Bakı: Maarif, 1986, 264 s.
4. Mehran Fatemi, Nihan Aliyev, Sadaghat Shahmorad, Existence and uniqueness of solution for a fractional order integro-differentiation equation with non-local and Scientific research. Applied mathematics, 2011, 2, 1291-1296.

ТРЕХТОЧЕЧНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДРОБНЫХ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Н.А.АЛИЕВ, В.А.ОСМАНОВ

РЕЗЮМЕ

В данном случае рассматривается на о трехточечной граничной задаче для простого линейного интегро-дифференциального уравнения с дробными порядками. Сама проблема сводится к уравнению второго типа регулярного ядра Вольтером и Фредгольмом.

Изучение таких уравнений представляет собой метод последовательной подстановки. Так что, если использовать этот метод во всех членах, процесс будет сложным. Следовательно, поскольку ядро этого члена можно сделать сколь угодно малым путем выполнения метода последовательной подстановки только на члене Вольтерра, этот член отбрасывается как погрешность, и строится последовательность разрешения для второго типа полученного уравнения Фредгольма.

Ключевые слова: Трехточечная задача, Краевая задача, Интегро-дифференциальное уравнение, Уравнение дробного порядка.

THREE-POINT BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR FRACTIONAL INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

N.A.ALIYEV, V.Ə.OSMANOV

SUMMARY

In the present case, the problem of a three-point boundary for a Elementary, linear integro-differential equation with a fraction is considered. This problem itself is brought to the equation of the second type of regular nucleus by both Voltaire and Fredholm.

The study of such equations is a method of sequential substitution. Thus, if this method is carried out to the fullest term, the process becomes more complicated. Therefore, since the nucleus of this equation can be made as small as desired by performing the sequential substitution method only at the Volterra term, this equation is discarded as an error and a resolution sequence is constructed for the second type of Fredholm equation obtained.

Key words: Three -point problem, Boundary value problem, Integro-differential equation, Fractional-order differential equation, global boundary conditions.

ADI BİRTƏRTİBLİ XƏTTİ DİFERENSİAL TƏNLİKLƏR SİSTEMİ ÜÇÜN YARIMOXDA SƏPİLMƏ MƏSƏLƏSİ

E.M.ƏHMƏDOV

Bakı Dövlət Universiteti

etibar.aze03@gmail.com

İşdə n sayda adi birtərtibli xətti diferensial tənliklər sistemi üçün yarımoxda $n-2$ gələn 2 səpilən dalğa halında düz səpilmə məsələsi öyrənilmiş, səpilmə matrisi təyin olunmuşdur.

Açar sözlər: səpilmə məsələsi, səpilmə matrisi, sərhad şərtləri, Volter tənliklər, tərs səpilmə məsələsi

Yarımoxda ($x \geq 0$) aşağıdakı adi birtərtibli xətti diferensial tənliklər sisteminə baxaq:

$$-i \frac{dy_k(x)}{x} + \sum_{j=1}^n c_{kj}(x)y_j(x) = \lambda \xi_k y_k(x), \quad k = \overline{1, n} \quad (1)$$

Burada $i^2 = -1$, $c_{kj}(x)$ ($k, j = 1, \bar{n}$) funksiyaları kompleks qiymətli, ölçülən, $c_{kk}(x) \equiv 0$, $k = \overline{1, n}$ və $|C_{kj}(x)| \leq ce^{-\varepsilon x}$, $c > 0, \varepsilon > 0$ (2) şərtlərini ödəyirlər; $\xi_1 > \dots > \xi_{n-2} > 0 > \xi_{n-1} > \xi_n$ şərti ödənilir; λ –spektral parametrdir.

(1) sisteminin həlli dedikdə mütləq kəsilməz və sanki hər yerdə (1) tənliklər sistemini ödəyən funksiya başa düşülür.

(1) tənliklər sistemi üçün yarımoxda $n - 2$ məsələyə birlikdə baxılır.

Burada k –cı məsələ ($k = 1, 2, \dots, n - 2$) dedikdə (1) sisteminin elə

$$\begin{aligned} y^k(x, \lambda) = \\ \{y_1^k(x, \lambda), \dots, y_n^k(x, \lambda)\} \end{aligned} \quad (3)$$

həlli başa düşülür ki,

$$y_p^k(x, \lambda) = A_k e^{i\lambda \xi_k x} + o(1), \quad p, k = \overline{1, n-2} \quad (4)$$

asimptotik göstəriləşinə malik olsun və

$$y_{n-1}^k(0, \lambda) = \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, n-2\} \\ i \neq k}} y_i^k(0, \lambda), \quad (5)$$

$$y_n^k(0, \lambda) = y_k^k(0, \lambda), \quad k = 1, 2, \dots, n-2 \quad (6)$$

sərhad şərtləri ödənsin.

Baxılan $n - 2$ sayda (1) – (4) – (5) – (6) məsələləri (1) tənliklər sistemi üçün yarımoxda səpilmə məsələsi adlanır.

Dirak adi diferensial tənliklər sistemi üçün bütün oxda və yarımoxda səpilmənin və spektral analizin düz və tərs məsələləri M.Q.Kreytn [1], M.G.Qasimov [2], M.G.Qasimov və B.M.Levitan [3], L.P.Nijnik və F.L.Vu [4], F.Q.Maqsudov və S.Q.Vəliyev [5], İ.M.Hüseynov [6], və s. tərəfindən öyrənilmişdir.

Birtərtibli adi diferensial tənliklər sistemi üçün gələn və əks olunan dalğalar müxtəlif sürətli olduqda bütün oxda tərs səpilmə məsələsi D.Kaup [7], A.B.Şabat [8], R.Bils və R.R.Kaufman [9], və s. tərəfindən tədqiq edilmişdir. Dörd gələn iki səpilən dalğa halı N.Ş.İsgəndərov və L.N.Cəfərova [10] tərəfindən öyrənilmişdir. Burada məsələ daha ümumi, $n - 2$ gələn və iki səpilən dalğa halında tədqiq edilmişdir.

Teorem: Tutaq ki, (1) sisteminin $C_{kj}(x)$, $k, j = \overline{1, n}$ əmsalları ölçülən funksiyalardır, $L_\infty(0, \infty)$ fəzasına daxildir və (2) şərtlərini ödəyirlər. λ – həqiqi ədəddir ($\text{Im } \lambda = 0$). Onda (1) – (4) – (5) – (6) səpilmə məsələsinin verilmiş gələn $A_1 e^{i\lambda \xi_1 x}, \dots, A_{n-2} e^{i\lambda \xi_{n-2} x}$ dalğaları üçün $L_\infty(0, \infty)$ fəzasında yeganə həlli var. Burada, həmçinin $L_\infty(0, \infty)$ fəzasında aşağıdakı asimptotik göstəriliş doğrudur.

$$y_p^k(x, \lambda) = B_p^k e^{i\lambda \xi_p x} + o(1), \quad x \rightarrow +\infty, \quad p = n - 1, n; k = \overline{1, n - 2}. \quad (7)$$

İsbatı. (1) sistemi üçün qoyulmuş səpilmə məsələsi, yəni (1) – (4) – (5) – (6) məsələsi aşağıdakı inteqral tənliklər sisteminə ekvivalentdir:

$$y_p^k(x, \lambda) = A_p e^{i\lambda \xi_p x} - i \sum_{j=1}^n \int_x^{+\infty} C_{pj}(\tau) y_j^k(\tau, \lambda) e^{i\lambda \xi_p(x-\tau)} d\tau, \quad p = \overline{1, n - 2},$$

$$y_p^k(x, \lambda) = B_p^k e^{i\lambda \xi_p x} - i \sum_{j=1}^n \int_x^{+\infty} C_{pj}(\tau) y_j^k(\tau, \lambda) e^{i\lambda \xi_p(x-\tau)} d\tau, \quad p = n - 1, n, \quad (8)$$

burada B_p^k ($p = n - 1, n; k = \overline{1, n - 2}$) əmsalları (5) və (6) vasitəsi ilə tapılır:

$$B_{n-1}^k - i \sum_{j=1}^n \int_0^{+\infty} C_{n-1,j}(\tau) y_j^k(\tau, \lambda) e^{-i\lambda \xi_{n-1} \tau} d\tau =$$

$$= \sum_{\substack{p \in \{1, \dots, n-2\} \\ p \neq k}} \left[A_p - i \sum_{j=1}^n \int_0^{+\infty} C_{pj}(\tau) y_j^k(\tau, \lambda) e^{-i\lambda \xi_p \tau} d\tau \right],$$

$$\begin{aligned}
B_n^k - i \sum_{j=1}^n \int_0^{+\infty} C_{n,j}(\tau) y_j^k(\tau, \tau) e^{-i\lambda \xi_n \tau} d\tau \\
= A_k - i \sum_{j=1}^n \int_0^{+\infty} C_{kj}(\tau) y_j^k(\tau, \lambda) e^{-i\lambda \xi_k \tau} d\tau .
\end{aligned}$$

Buradan

$$\begin{aligned}
B_{n-1}^k = i \sum_{j=1}^n \int_0^{+\infty} C_{n-1,j}(\tau) y_j^k(\tau, \lambda) e^{-i\lambda \xi_{n-1} \tau} d\tau + \\
+ \sum_{\substack{p \in \{1, \dots, n-2\} \\ p \neq k}} \left[A_p - i \sum_{j=1}^n \int_0^{+\infty} C_{pj}(\tau) y_j^k(\tau, \lambda) e^{-i\lambda \xi_p \tau} d\tau \right] ; \\
B_n^k = i \sum_{j=1}^n \int_0^{+\infty} [C_{n,j}(\tau) e^{-i\lambda \xi_n \tau} - C_{kj}(\tau) e^{-i\lambda \xi_k \tau}] y_j^k(\tau, \lambda) d\tau , \\
k = \overline{1, n-2} . \tag{9}
\end{aligned}$$

Baxılan (8) sistemi Volter tip inteqral tənlikdir. Onda (2) şərtindən və $\text{Im}\lambda = 0$ olduğundan $L_\infty(0, +\infty)$ fəzasında sistemin yeganə həllinin varlığı alınır. Ona görə (1) sistemi üçün $L_\infty(0, \infty)$ fəzasında səpilmə məsələsinin yeganə həlli var.

Digər tərəfdən (8) –dən

$$\begin{aligned}
|y_p^k(x, \lambda) - B_p^k e^{i\lambda \xi_p x}| &= \left| \sum_{j=1}^n \int_x^{+\infty} C_{pj}(\tau) y_j^k(\tau, \lambda) e^{i\lambda \xi_p(x-\tau)} d\tau \right| \leq \\
&\leq \sum_{j=1}^n \int_x^{+\infty} |C_{pj}(\tau)| |y_j^k(\tau, \lambda)| |e^{i\lambda \xi_p(x-\tau)}| d\tau \leq \\
&\leq \sum_{j=1}^n \int_x^{+\infty} c e^{-\varepsilon \tau} M d\tau = ncM \frac{1}{-\varepsilon} e^{-\varepsilon x} \Big|_x^{+\infty} = \frac{ncM}{\varepsilon} e^{-\varepsilon x} ,
\end{aligned}$$

Buradan $x \rightarrow +\infty$ olduqda (7) asimptotik göstəriləsi alınır. Yuxarıda nəzərə aldıq ki, $|e^{i\lambda \xi_p(x-\tau)}| = 1$ və $y_j^k(\tau, \lambda) \in L_\infty(0, \infty)$ olduğundan $\exists M > 0$ vardır ki, sanki hər yerdə

$$|y_j^k(\tau, \lambda)| \leq M$$

bərabərsizliyi ödənilir.

Onda teoremə əsasən hər bir $\{A_1 e^{i\lambda \xi_1 x}, \dots, A_{n-2} e^{i\lambda \xi_{n-2} x}\}$ vektor-funksiyası üçün yeganə həll var və bu həll (7) asimptotikasına malikdir. Beləliklə,

$$S_k(\lambda) : \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{n-2} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} B_{n-1}^k \\ B_n^k \end{pmatrix}, k = \overline{1, n-2} \tag{10}$$

matris funksiyası təyin olunur. Bu funksiya

$$S_k(\lambda) = \begin{pmatrix} S_{11}^k(\lambda) & \dots & S_{1,n-2}^k(\lambda) \\ S_{21}^k(\lambda) & \dots & S_{2,n-2}^k(\lambda) \end{pmatrix}, k = 1, \overline{n-2} \quad (11)$$

şəkildə olur.

$S(\lambda) = (S_1(\lambda), \dots, S_{n-2}(\lambda))$ matris-funksiyasəna (1) sislemi üçün yarımoxda səpilmə matrisi deyəcəyik.

ƏDƏBİYYAT

1. Крейн М.Г. К теории акселерант и матриц канонических дифференциальных систем // ДАН СССР, 1956, т.111, №6, с.1167-1170.
2. Гасымов М.Г. Обратная задача теории рассеяния для системы уравнений Дирака порядка $2n$ // Труды ММО, 1968, Т.19, с.41-112.
3. Гасымов М.Г. Левитан Б.М. Определение системы Дирака по фазе рассеяния // ДАН СССР, 1966, Т.167, №6, с.1219-1222.
4. Нижник Л.П., Фом.Лой.Ву. Обратная задача рассеяния на полуоси с несамосопряженной потенциальной матрицей // Украинский математический журнал, 1974, Т.26, №4, с.469-486.
5. Максудов Ф.Г., Велика С.Г. О разрешимости обратной задачи для системы Дирака на всей оси // ДАН Аз ССР, 1985, Т.61, №10, с.6-9.
6. Гусейнов И.М. Обратная задача теории рассеяния для системы уравнений Дирака $2n$ -го порядка // ДАН СССР, 1977, Т-232, №5, с.993-996.
7. Каур.Д. The three-wave interaction -a non dispersive phenomenon // Stud. Appl. Math. , 1976, V.55, p.9-44.
8. Шабат А.Б. Обратная задача теории рассеяния // Дифференциальные уравнения, 1979, Т.15, №10, с.1824-1834.
9. Beals R., Coifman R.R. Scattering and inverse scattering problems for first order system // Comm. on pure and app. math., 1984, v.37, p.39.
10. Iskenderov N.Sh., Jafarova L.N. Inverse scattering problem on the semi-axis for a system of six ordinary differential equations // Transactions of National Academy of Sciences of Azerbaijan, 2017, №4 (V. XXXVII), p.71-76.

ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА НА ПОЛУОСИ

Э.М.АХМЕДОВ

РЕЗЮМЕ

В работе изучается прямая задача рассеяния для системы n обыкновенных линейных дифференциальных уравнений первого порядка на полуоси с $(n-2)$ падающих и двух рассеянных волн. Определена матрица рассеяния на полуоси.

Ключевые слова: задача рассеяния, матрица рассеяния, краевые условия, вольтерровские уравнения, обратная задача рассеяния.

THE SCATTERING PROBLEM FOR SYSTEMS OF LINEAR FIRST-ORDER ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS ON THE SEMI-AXIS

E.M.AHMADOV

SUMMARY

In this paper , the direct scattering problem are studied on a semi-axis for a first order ordinary differential equations system for $n-2$ number incident and two scattering wave. Is determined scattering matrices on a semi-axis.

Key words: scattering problems, scattering matrices, boundary conditions, Volters equations.

UOT 517

ON THE RECURRENCE SEQUENCE AND THEIR APPLICATIONS

A.M.AKHMEDOV, I.V.SAFARLI

Baku State University
akhmedali@rambler.ru
isafarli96@gmail.com

In this work, we study the behavior of the sequence (a_n) of complex numbers satisfying the relation $a_{n+k} = q_1 a_n + q_2 a_{n+1} + \dots + q_k a_{n+k-1}$, where q_n is a fixed sequence of complex numbers. Such kind of sequences arise in problems of analysis, fixed point theory, dynamical systems, theory of chaos, etc. ([1]-[5]).

Studying the spectra of triple and more than triple band triangle operator- matrices, the behavior of such sequence required. From the point of application, the proved results and formulas in the literature for the spectra of the operator-matrices look like very complicated. In this work we apply receiving results to some natural processes and to some spectral problems for the generalized difference operator - matrices.

Keywords: spectrum, sequence, returned sequence, population, population size.

1. Introduction

1.1. Overview of work on the spectra of difference operator - matrices and their generalizations.

In this subsection, we summarize the important concepts and results in the existing literature concerning the spectra of difference operator - matrices and their generalizations. The spectrum and fine spectrum of the difference operator-matrix Δ over the sequences spaces c_0 and c have been studied by Altay and Basar [6]. Akhmedov and Basar ([1], [2]) have studied the fine spectrum of the difference operator-matrix Δ_v over the sequences spaces l_p and bv_p , where $1 \leq p < \infty$. Note that the sequence space bv_p , ($1 \leq p < \infty$) was studied by Basar and Altay [7] and Akhmedov and Basar [2]. The fine spectrum of the double band operator – matrices have been studied by many mathematicians.

The fine spectrum of the Zweirer operator-matrix Z^*s over the spaces l_1 and bv has been investigated by Altay and Karakush [8]. Now we give results concerning the spectra of some generalizations of difference operator-matrices. The fine spectrum of the generalized double-band operator $B(r, s)$ over the sequence spaces c_0 and c has been studied by Altay and Basar [9]. Also, the fine spectrum of the operator $B(r, s)$ over the sequence spaces l_p and bv_p has been

examined by Furkan et al. [10]. The fine spectrum of the operator $B(r, s)$ over the sequence spaces l_p and bv_p , where $(1 < p < \infty)$. The fine spectrum of the generalized difference operator Δ_v over the sequences spaces c_0 and l_1 investigated by Srivastava and Kumar ([11,12]). In ([3], [4]) The fine spectrum of the operator Δ_v over the sequence space c has been examined by Akhmedov and El-Shabrawy [5]. Akhmedov and El-Shabrawy [6] have modified the definition the operator Δ_v and have obtained the fine spectrum of the modified operator Δ_v over the sequence spaces c and l_p , where $(1 < p < \infty)$. The fine spectrum of the generalized difference operator $\Delta_{a,b}$ over the sequences spaces c_0 , c and l_1 has also been studied by Akhmedov and El-Shabrawy ([3], [4], [7]). The spectrum of the upper triangular double-band matrices over the sequence spaces c_0 and c has been determined by Karakaya and Altun [13]. The fine spectrum of the triple-band matrices $B(r, s, t)$ over c_0 and c has been examined by Furkan and et al. [14, 15], over the sequence spaces l_1 and bv by Bilgi,c and Furkan [15] and over the sequence spaces l_p and bv_p $(1 < p < \infty)$ by Furkan and et al. [16]. The spectrum of the triangular operator-matrix $D(r, o, s, o, t)$ has 2 been examined by Tripathy and Paul [17], the spectrum and fine spectrum of generalized second order forward difference operator $\Delta^2 u,v,w$ on the sequence spaces l_1 have been studied by Panigrahi and Srivastava [18], and others. Note that the formulas of spectrum for double-band matrices usually describe circular domains. But for triple and more triple-band matrices, the obtained formulas of spectra look like very complicated. We will discuss this issue in the section 4.

2. Preliminaries

We recall some basic concepts of spectral theory which are needed for our work ([6], pp. 370 - 372).

Let X be a Banach space and $T : X \rightarrow X$ be a bounded linear operator.

By $R(T)$ we denote the range of T , i.e., $R(T) = \{y \in X : y = Tx, x \in X\}$.

By $B(X)$ we denote the set of all bounded linear operators on X into itself. If $T \in B(X)$, then the adjoint T^* of T is a bounded linear operator on the topological dual X^* of X defined by $(T^*f)(x) = f(Tx)$ for all $f \in X^*$ and $x \in X$.

Let $X \neq \{\emptyset\}$ be a complex normed space and if $D(T)$ is a domain of definition of the linear operator $T : D(T) \rightarrow X$, $D(T) \subseteq X$, with T we associate the operator $T_\lambda = T - \lambda I$, where λ is a complex number and I is the identity operator on $D(T)$. If T_λ has an inverse which is linear, we denote it by $(T - \lambda I)^{-1}$ and call it the resolvent operator T . Many properties of T_λ and T_λ^{-1} depend on λ , and spectral theory is concerned with those properties.

Definition 1.1. Let $X \neq \{\emptyset\}$ be a complex normed space and $T : D(T) \rightarrow X$ be a linear operator with domain $D(T) \subseteq X$. A regular value λ of T is a complex number such that

(R1) T_λ^{-1} exists,

(R2) T_λ^{-1} is bounded,

(R3) T_{λ}^{-1} is defined on a set which is dense in X .

The resolvent set of T , denoted by $\rho(T)$ is the set of all regular values λ of T . Its complement $\sigma(T, X) = C/\rho(T, X)$ in the complex plane C is called the spectrum of T . Furthermore, the spectrum of $\sigma(T, X)$ is partitioned into three disjoint sets as follows:

The point (discrete) spectrum $\sigma_p(T, X)$ is a set such that T_{λ}^{-1} does not exist. Any such $\lambda \in \sigma_p(T, X)$ is called an eigenvalue of T .

The continuous spectrum $\sigma_c(T, X)$ is a set such that T_{λ}^{-1} exists and satisfies (R3) but not (R2), that is T_{λ}^{-1} is unbounded.

The residual spectrum $\sigma_r(T, X)$ is a set such that T_{λ}^{-1} (may be bounded or not) but does not satisfy (R3), that is, the domain of T_{λ}^{-1} is not dense in X .

3. On the returned sequences

In this section we shall use the special class of iterative processes [2] which is called returned sequences of real or complex numbers. By returned sequence of order k we mean the sequence whose every term is subordinates with k number preceding terms. In other words,

$$a_{n+k} = q_1 a_n + q_2 a_{n+1} + \dots + q_k a_{n+k-1} \quad (1)$$

where (a_n) is a sequence of complex numbers, q_1, q_2, \dots, q_k are the giving complex numbers.

For example,

$$a_{n+2} = q_1 a_n + q_2 a_{n+1} \quad (2)$$

In order to study the behavior of the sequence represented by (2) connected by its characteristic equation

$$L^2 - q_2 L - q_1 = 0,$$

where

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n-1}}{a_n}$$

The sequence of the form (2) is a second order returned sequence. The arithmetic progression

$$a_{n+1} = a_n + d$$

is a second order returned sequence. Really, from relations $a_{n+2} = a_{n+1} + d$, $a_{n+1} = a_n + d$ we get that $a_{n+2} = -a_n + 2a_{n+1}$. Another example, (n^2) is a third order returned sequence. Really,

$$a_{n+3} = a_n + 3a_{n+1} + 3a_{n+2}, \text{ where } a_n = n^2.$$

From the point of view the returned sequence of the order k is a solution of the linear homogeneous difference equation order k with constant coefficients. Setting first k terms of returned sequence is equivalent to setting initial conditions of the Cauchy problem of the difference equation.

Theory of linear homogeneous equations with constant coefficients sometimes allows to find the general term of the returned sequence. But in many cases to do it is very difficult.

The last equation is called a characteristic equation of (2). There were attempts to study the behavior of the sequence (a_n) for the case (2), where every term (beginning from third step) subordinates with two preceding terms. If the number of subordinated numbers are three, the order of the characteristic equation will be three, and if four, then order will be four, and so on. But for these cases we can use this method for not more than fourth order equation excluding some special cases. The fact is that in the beginning from the fifth order in general cases we don't have any general forms for the roots in radical of the characteristic equation. Even for second order equation to analyze the roots is very hard.

Taking into account above eliminations we offer a new method for the investigation the behavior of the sequence (a_n) with condition (1) not using characteristic equation.

The following theorem is important and will be used in the next section.

Theorem 1[2]. Let (a_n) be a sequence of complex numbers, k be a natural number and q_1, q_2, \dots, q_k be given complex numbers such that $|q_1| + |q_2| + \dots + |q_k| < 1$ and $a_{n+k} = q_1 a_n + q_2 a_{n+1} + \dots + q_{k-1} a_{n+k-2} + q_k a_{n+k-1}$. Then $(a_n) \in l_p$ ($1 \leq p < \infty$).

4. Applications

4.1. On some problems of the stability of biological community.

It is known that in mathematical models development of the population is considered in discrete case ([19]). The population size is usually represented of quantity N_t , which takes some value at fixed time.

The difference equation of order k is represented by

$$N_t = F(N_{t-1}, N_{t-2}, \dots, N_{t-k}; t)$$

where parameters of function F in general case depends on that, on which step t the calculation is being produced. For the population it means the change of external and internal facts over the time, which defines its development.

If we suppose that, these facts are the same over the considered period of time, then we come to the equation which is presented in the following form. Such a scheme accurately represents the process of census of real populations which is implemented as rule in discrete moment of time. In this case corresponding difference equation of the order k has the form

$$N_t = F(N_{t-1}, N_{t-2}, \dots, N_{t-k}) \quad (3)$$

Here the number of population in the moment t depends only on number of preceding moments.

Instead of the formula (3) we will use the next linearized formula

$$N_m = q_1 N_{m-1} + q_2 N_{m-2} \quad (4)$$

Theorem 2. If $|q_1| + |q_2| < 1$, then $\{N_m\} \in l_p$ ($1 \leq p < \infty$).

4.2 The spectrum of some generalized difference operator-matrices in space l_1 .

In this subsection as an example we investigate the spectrum of the difference operator-matrix

$$B(r, s, t) = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ s & r & 0 & 0 & 0 & \dots \\ t & s & r & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{bmatrix}$$

in space l_1 .

The next theorem is proved.

Theorem 3. For the operator $B(r, s, t) : l_1 \rightarrow l_1$ the following assertions hold:

- 1) $\|B(r, s, t)\| = |r| + |s| + |t|$;
- 2) $\sigma(B(r, s, t)) = D$,

where

$$D = \{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - r| \leq |s| + |t| \}.$$

Proof.

The first assertion is proved in [6].

Now, let's prove the second assertion of the theorem. First, we prove that $(B(r, s, t) - \lambda I)^{-1}$ exists and is bounded for $\lambda \notin D$ and the operator $B(r, s, t) - \lambda I$ is not invertible for $\lambda \in D$.

We can calculate that

$$(B - \lambda I)^{-1} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_2 & a_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_3 & a_2 & a_1 & 0 & 0 & \dots \\ a_4 & sa_3 & a_2 & a_1 & 0 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{bmatrix},$$

where $B = B(r, s, t)$,

$$a_1 = 1 / (r - \lambda),$$

$$a_2 = -s / (r - \lambda)^2,$$

$$a_3 = s^2 - (r - \lambda)t / (r - \lambda)^3,$$

....

$$a_n = -s / (r - \lambda) a_{n-1} - t / (r - \lambda) a_{n-2}$$

...

for all $n \geq 3$.

Let us denote

$$q_1 = -s / (r - \lambda)$$

$$q_2 = -t / (r - \lambda)$$

Then we have

$$a_n = q_1 a_{n-2} + q_2 a_{n-1}, \quad n \geq 3$$

We see that the sequence (a_n) is a second order returned sequence. Applying theorem 1 we may see that

$$\| (B - \lambda I)^{-1} \| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m=n}^{\infty} |a_m| = \sum_{m=1}^{\infty} |a_m| < \infty,$$

$$\text{if } |q_1| + |q_2| < 1.$$

This shows that $(B - \lambda I)^{-1}$ is a bounded linear operator on l_1 .

And this statement proves the second assertions of the theorem.

The theorem has now been proved completely.

REFERENCES

1. Akhmedov A.M. and Basar F., The fine spectra of the difference operator Δ over the sequence space bv_p ($1 \leq p < \infty$), Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) 23, 1757-1768. 2007.
2. Akhmedov A.M. On recurrent processes and associated with them spectral
3. problems. Proceedings of the 6-th International Conference on Control and
4. Optimization with Industrial Applications. Volume I, 13-11 July, 2018, Baku, Azerbaijan, p.44-46.
5. Dorian Popa, Hyers-Ulam, Stability of the linear recurrence with constant coefficients, Advances in Difference Equations 2005: 2 (2005) 101-102.
6. Khan MS, Berzig M, Samet B. Some convergence results for iterative sequences of Presic type and applications. Adv Dif.Equ 2012; 38: 19 p.
7. Slavisa B. Presic Sur une classe inéquations aux différences finies et sur la convergence de certaines suites. Publ.de l'Institut Mathématique Nouvelle série tome 1965; 5(19):75-78.
8. Altay B, Basar F. On the fine spectrum of the generalized difference operator $B(r, s)$ over the sequence spaces c_0 and c . Int J Math Sci 2005; 18:3005-3013
9. Basar F, Altay B. On the space of sequences of p -bounded variation and related matrix mappings. Ukrainian Math J 2003; 55(1):136-147.
10. Altay B, Karakush M. On the spectrum and the π -spectrum of the Zweier matrix as an operator on some sequence spaces. Thai J Math 2005; 3(2):153-162.
11. Altay B, Basar F. On the fine spectra of the difference operator Δ on c_0 and c . Int J Math Sci 2005; 18:3005-3013.
12. Furkan H, Bilgi, c H, Kayaduman K. On the fine spectrum of the generalized difference operator $B(r, s)$ over the sequence spaces ll and bv . Hokkaido Math J 2006; 35:893-904.
13. Srivastava P, Kumar S. On the π -spectrum of the generalized difference
14. operator ν over the sequence spaces c_0 . Commun Math Anal 2009; 6(1):8-21.
15. Srivastava P, Kumar S. Fine spectrum of the generalized operator ν on sequence space ll . Thai J Math 2010; 8(2):221-233.
16. Karakaya V, Altun M. Fine spectra of upper triangular double-band matrices. J Comp Appl Math 2010; 234:1387-1394.
17. Popa D. Hyers-Ulam Stability of the linear recurrence with constant coefficients. Adv Diff Equa 2005; 2:101-107.

18. Furkan H, Bilgi, c H. On the fine spectrum of the generalized difference operator $B(r, s)$ over the sequence spaces l_p and bv_p , $(1 < p < \infty)$. Nonlinear Anal 2008; 68(3):499-506.
19. Furkan H, Bilgi, c H, Basar F. On the fine spectrum of the operator $B(r, s, t)$ over the sequence spaces l_p and bv_p , $(1 < p < \infty)$. Comp Math Appl 2010; 60:2141-2152.
20. Tripathy BC, Paul A. The spectrum of the operator $D_{r,0,s,t}$ over the sequence spaces c_0 and c . J Math Article ID 430965, 2013; 7 p
21. Panigrahi BL, Srivastava PD. Spectrum and fine spectrum of generalized second order forward difference operator Δ_{uvw}^2 on sequence space l_1 . Demonstratio Math 2012; vol. XIV 3:593-609.
22. Свирежев Ю.М., Логофет Д.О. Устойчивость биологических сообществ; М.: Наука, ИБ №11056, 1978; 352 с.

BİR REKURENT ARDICILLIQ VƏ ONUN TƏTBİQİ HAQQINDA

Ə.M.ƏHMƏDOV, İ.V.SƏFƏRLİ

XÜLASƏ

İşdə rekurrent ardıcılıqların mühüm bir sinifi olan qayıdan ardıcılıqlar və onların öz-lərini necə aparması haqqında məlumat verilir. Alınan nəticələr bəzi təbii proseslərə və ümumi-ləşmiş fərq operator - matrislər üçün spektral problemlərə tətbiq edilmişdir.

Açar sözləri: spektr, ardıcılıq, populyasiya, populyasiyanın sayı.

ОБ ОДНОЙ РЕКУРРЕНТНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЕ

А.М.АХМЕДОВ, И.В.САФАРЛИ

РЕЗЮМЕ

В работе даются сведения об одном классе итеративных последовательностях (возвратная последовательность) и их поведений, а также полученные результаты при-меняются к некоторым естественным процессам и некоторым спектральным задачам для обобщенных разностных операторных матриц.

Ключевые слова: спектр, последовательность, возвратная последовательность, популяция, численность популяции.

UOT 517.927

**YARIMOXDA İKİNCİ TƏRTİB DİFERENSİAL OPERATORLARIN
MƏNFİ MƏXSUSİ ƏDƏDLƏRİNİN PAYLANMA FUNKSİYASI İLƏ
BAĞLI BƏZİ BƏRZBƏRSİZLİKLƏR****G.M.EYVAZLI***Sumqayıt Dövlət Universiteti*
aliyeva_gunel193@mail.ru

Məqalədə yarımoxda verilmiş ikinci tərtib diferensial operatorun mənfi spektri tədqiq edilmişdir. Mənfi spektrin diskretliyi şərtləri müəyyən edilmiş, mənfi məxsusi ədədlərin paylanma funksiyası üçün bəzi qiymətləndirmələr alınmışdır.

Açar sözlər: Diferensial operator, spektr, məxsusi ədədlər, paylanma funksiyası, öz-özünə qoşma operator, aşağıdan məhdud operator, Hilbert fəzası.

Məlum olduğu kimi diskret spektrə malik olan operatorların kvant mexanikasında və nəzəri fizikanın bir çox məsələlərinin öyrənilməsində mühüm əhəmiyyəti və rolu vardır. Ona görə də verilmiş operatorun məxsusi ədədlərinin xassələrinin öyrənilməsi və asimptotik paylanmasının tədqiqi xüsusi maraq doğuran məsələlərdir.

İlk dəfə C.Titmarş [9] bütün həqiqi oxda verilmiş sonsuzluqda artan potensiala malik Şturm-Liuvill operatorunun məxsusi ədədlərinin asimptotik paylanma düsturunu almışdır. Daha sonra onun tərəfindən Şredinger operatorunun məxsusi ədədlərinin paylanma funksiyası üçün asimptotik düstur isbat edilmişdir. Məxsusi ədədlərin asimptotik paylanma düsturunun alınması üçün Titmarş metodu B.M.Levitan [5] tərəfindən təkmilləşdirilmişdir.

Diferensial operatorların məxsusi ədədlərinin asimptotik paylanmasını öyrənmək üçün G.Veyl və R.Kurant [2] tərəfindən daxil edilmiş variasiya üsulundan da istifadə olunur. Bu üsul M.Ş.Birman [1] tərəfindən inkişaf etdirilmişdir. Bu B.Y.Skacekin [7] qiymətli tədqiqatları vardır. Bəzi hallarda verilmiş məsələnin spektri yalnız yeganə limit nöqtəsi sıfır olan mənfi məxsusi ədədlərdən ibarət olur. Bu halda $(-\varepsilon)$ dan kiçik olan məxsusi ədədlər sayının asimptotikasının tapılması xüsusi əhəmiyyətə malikdir. M.Ş.Birman yuxarıda qeyd olunan məqaləsində yarımoxda verilmiş ikinci tərtib diferensial tənliyin mənfi məxsusi ədədlərinin paylanması üçün qiymətləndirmələr alınmışdır. Sinqulyar diferensial operatorların mənfi məxsusi ədədləri üçün asimptotik

düsturlar B.Y.Skacek [7], Q.Rozenblyum [6], A.Laptev [3], A.laptev və M.Z.Solomyak [4] tərəfindən alınmışdır.

1. Məsələnin qoyuluşu.Məsələnin məxsusi ədədləri ilə bağlı bəzi bərzəbərsizliklər.

$L_2[0, \infty)$ fəzasında

$$l(y) = -y'' - q(x)y \quad (1)$$

diferensial ifadəsi və

$$y'(0) = 0 \quad (2)$$

sərhəd şərtləri ilə təyin olunmuş L operatoruna baxaq.

Fərz edilir ki, $q(x)$ funksiyası aşağıdakı şərtləri ödəyir:

1) $q(x)$ funksiyası $[0, \infty)$ intervalında kəsilməz, monoton azalan, müsbət funksiyadır.

2) $\lim_{x \rightarrow \infty} q(x) = 0$.

L operatorunun təyin oblastı $D(L)$ elə $y(x) \in L_2[0, \infty)$ funksiyalarından ibarətdir ki, $y'(x)$ hər bir $[a, b] \subset [0, \infty)$ parçasında mütləq kəsilməz olsun, $l(y) = -y'' - q(x)y, l(y) \in L_2[0, \infty)$ və $y'(0) = 0$ şərti ödənilsin. Bu halda L operatoru $D(L)$ -dən $L_2[0, \infty)$ fəzasına $Ly = l(y)$ kimi təsir edən operatorudur:

$$L : D(L) \rightarrow L_2[0, \infty)$$

Bu qayda ilə təyin edilmiş L operatoru öz-özünə qoşma, aşağıdan məhduddur və spektrin mənfi hissəsi diskretdir [1]. L operatorunun mənfi məxsusi ədədlərini $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq$ kimi işarə edək.

$q(x)$ funksiyası üzərinə qoyulan şərtlərdən onun tərs funksiyasının varlığı alınır. Bu tərs funksiyayı $p(x)$ ilə işarə edək. $\varepsilon \in (0, q(0))$ ədədini götürək və aşağıdakı operatorları təyin edək:

1) $L_2[p(\varepsilon), \infty)$ fəzasında

$$l(y) = -y'' - q(x)y$$

diferensial ifadəsi və $y'(p(\varepsilon)) = 0$ sərhəd şərti ilə təyin olunmuş operatoru L' ilə işarə edək.

2) $L_2[0, p(\varepsilon))$ fəzasında $l(y) = -y'' - q(x)y$ diferensial ifadəsi və uyğun olaraq $y(0) = y(p(\varepsilon)) = 0$ və $y'(0) = y'(p(\varepsilon)) = 0$ sərhəd şərtləri ilə təyin olunan operatorları L_0 və L_1 ilə işarə edək.

3) $L_2[x_{i-1}, x_i]$ fəzasında (1) diferensial ifadəsi və uyğun olaraq $y(x_{i-1}) = y(x_i) = 0$ və $y'(x_{i-1}) = y'(x_i) = i$ sərhəd şərtləri ilə təyin olunmuş operatorları L_{0i} və L_{1i} ilə işarə edirik.

4) $L_2[x_{i-1}, x_i]$ fəzasında (1) $l(y) = -y'' - q(x_i)y(x)$ diferensial ifadəsi

və $(y(x_i)) = y(x_i) = 0$ sərhəd şərti ilə təyin olunmuş operatoru \bar{L}_{0i} ilə, $l(y) = -y'' - q(x_{i-1})y(x)$ diferensial ifadəsi və $(y'(x_{i-1})) = y'(x_i) = 0$ sərhəd şərti ilə təyin olunan operatoru isə \bar{L}_{1i} ilə işarə edək.

Əvvəlcə aşağıdakı teoremi isbat edək:

Teorem 1. Əgər $q(x)$ funksiyası 1) şərtini ödəyərsə, onda istənilən $y \in D(L')$ üçün

$$(L'y, y) \geq -\varepsilon(y, y) \quad (3)$$

bərabərsizliyi doğrudur.

İsbatı. İstənilən $y \in D(L')$ üçün aşağıdakı bərabərlikləri yaza bilirik:

$$\begin{aligned} (L'y, y) &= \int_{p(\varepsilon)}^{\infty} [-y''(x) - q(x)y(x)] \cdot \overline{y(x)} dx = -y'(x)\bar{y}(x) \Big|_{p(\varepsilon)}^{\infty} + \\ &+ \int_{p(\varepsilon)}^{\infty} y'(x)\bar{y}'(x) dx - \int_{p(\varepsilon)}^{\infty} q(x)y^2(x) dx = \int_{p(\varepsilon)}^{\infty} (y'(x))^2 dx - \int_{p(\varepsilon)}^{\infty} q(x)y^2(x) dx \quad (4) \end{aligned}$$

şərtə görə $q(x)$ funksiyası monoton azalan olduğundan $[p(\varepsilon), \infty)$ intervalında

$$q(x) \leq q(p(\varepsilon)) = \varepsilon \quad (5)$$

bərabərsizliyi doğrudur. Onda (4), (5) münasibətlərində istənilən $y \in D(L')$ üçün $(L'y, y) \geq -\varepsilon(y, y)$ olduğunu alırıq; $N(\alpha), N_0(\alpha)$ və $N_1(\alpha)$ ilə uyğun olaraq L, L_0 və L' operatorlarının $-\alpha$ -dan $\alpha \in (0, \infty)$ kiçik olan mənfi məxsusi ədədlərinin sayını işarə edək.

L operatorunun $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ məxsusi ədədlərinə uyğun ortonormal məxsusi vektorlarını $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ ilə işarə edək.

$T = L + \alpha E, T_0 = L_0 + \alpha E, T_1 = L_1 + \alpha E$ işarə edək. Burada E ilə uyğun olaraq $L_2[0, \infty)$ və $L_2[p(\varepsilon), \infty)$ fəzalarında vahid operatorları işarə edirik.

Aydındır ki,

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \cdots \leq \lambda_{N(\alpha)} \leq -\alpha, \lambda_{N(\alpha)+1} > -\alpha \quad (6)$$

olduğundan T operatorunun məxsusi ədədləri

$$\mu_i = \lambda_i + \alpha \quad (i = 1, 2, \dots) \text{ olar.}$$

Onda (6) münasibətinə görə

$$\mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots \leq \mu_{N(\alpha)} < 0, \mu_{N(\alpha)+1} \geq 0$$

olar.

Buradan T operatorunun mənfi məxsusi ədədlərinin sayının $N(\alpha)$ -ya bərabər olması alınır.

T_0 operatorunun α -dan kiçik olan məxsusi ədədləri sayını $N_0(\alpha), T_1$ operatorunun α -dan kiçik məxsusi ədədləri sayını $N_1(\alpha)$ ilə işarə edək.

T_0 və T operatorlarının mənfəi məxsusi ədədlərini uyğun olaraq

$$\mu_{(0)1} \leq \mu_{(0)2} \leq \dots \leq \mu_{(0)N_0(\alpha)} \quad (8)$$

və

$$\mu_{(1)1} \leq \mu_{(1)2} \leq \dots \leq \mu_{(1)N_1(\alpha)} \quad (9)$$

ilə, bu məxsusi ədədlərə uyğun ortonormal məxsusi vektorlarını isə

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N_0(\alpha)} \quad (10)$$

və

$$\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{N_1(\alpha)} \quad (11)$$

ilə işarə edək.

2. Əsas nəticələr.

Teorem 2. Əgər $q(x)$ funksiyası 1), 2) şərtlərini ödəyərsə, bu halda istənilən $\alpha \in (0, \infty)$ üçün

$$N(\alpha) \geq N_0(\alpha) \quad (12)$$

bərabərsizliyi doğrudur.

İsbatı. Əksini fərz edək. Yəni fərz edək ki, $N(\alpha) < N_0(\alpha)$. $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N_0(\alpha)}$ funksiyaların hər birinə ortoqonal olan, yəni $p(\varepsilon)$

$$(\varphi_i, \varphi) = \int_0^{p(\varepsilon)} \varphi_i(x) \bar{\varphi}(x) dx = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N_0(\alpha) \quad (13)$$

şərtini ödəyən

$$\varphi = \sum_{i=1}^{N_0(\alpha)} \beta_i \varphi_i \quad (14)$$

elementini götürək.

$$\begin{aligned} (T_0 \varphi, \varphi) &= \left(T_0 \left(\sum_{i=1}^{N_0(\alpha)} \beta_i \varphi_i \right), \sum_{i=1}^{N_0(\alpha)} \beta_i \varphi_i \right) = \\ &= \left(\sum_{i=1}^{N_0(\alpha)} \beta_i \mu_{(0)i} \varphi_i, \sum_{i=1}^{N_0(\alpha)} \beta_i \varphi_i \right) = \sum_{i=1}^{N_0(\alpha)} \mu_{(0)i} |\beta_i|^2 = \gamma < 0. \end{aligned} \quad (15)$$

[2]-dən məlumdur ki, bu halda $\tilde{\varphi}(x)$ funksiyası vardır ki, aşağıdakı şərtlər ödənilir:

a) $\tilde{\varphi}(x)$ funksiyasının $[0, p(\varepsilon)]$ parçasında ikinci tərtib kəsilməz törəməsi vardır;

b) Elə $[a, b] \subset (0, p(\varepsilon))$ parçası vardır ki, bu parça xaricində $\tilde{\varphi}(x) = 0$.

v) $|(T_0 \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}) - (T_0 \varphi, \varphi)| < -\frac{\gamma}{2}$

e) $(\varphi_i, \tilde{\varphi}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N(\alpha)$

Məlum olduğu kimi [],

$$\begin{aligned} \inf(Ty, y) &= \mu_{N(\alpha)+1} \\ y \in D(T), \|y\| &= 1 \\ y \perp \varphi_i, i &= 1, 2, \dots, N(\alpha) \end{aligned} \quad (18)$$

Buradan

$$\left(T_0 \left(\frac{\tilde{\varphi}}{\|\tilde{\varphi}\|}, \frac{\tilde{\varphi}}{\|\tilde{\varphi}\|} \right) \right) = \left(T \left(\frac{\tilde{\varphi}}{\|\tilde{\varphi}\|}, \frac{\tilde{\varphi}}{\|\tilde{\varphi}\|} \right) \right) \geq \mu_{N(\alpha)+1} \geq 0 \quad (19)$$

$$(T_0 \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}) \geq 0 \quad (20)$$

alırıq. (15) və (20) münasibətlərindən

$$(T_0 \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}) - (T_0 \varphi, \varphi) = (T_0 \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}) - \gamma \geq -\gamma$$

alırıq. Bu isə v) şərtinə ziddir. Deməli, $N(\alpha) < N_0(\alpha)$ ola bilməz, $N(\alpha) \geq N_0(\alpha)$ olmalıdır. Teorem 2 isbat olundu.

Teorem 3. $q(x)$ funksiyası 1), 2) şərtlərini ödədikdə istənilən $\alpha \in [\varepsilon, \infty)$ üçün

$$N(\alpha) \leq N_i(\alpha) \quad (21)$$

bərabərsizliyi doğrudur.

İsbatı. Əksini fərz edək; fərz edək ki, $N(\alpha) > N_i(\alpha)$ Onda $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N(\alpha)}$ funksiyalarına ortoqonal olan sıfırdan fərqli ele

$$\varphi = \sum_{i=1}^{N(\alpha)} d_i \varphi_i \quad (22)$$

funksiyası vardır ki,

$$\begin{aligned} (T\varphi, \varphi) &= \left(T \left(\sum_{i=1}^{N(\alpha)} d_i \varphi_i \right), \sum_{i=1}^{N(\alpha)} d_i \varphi_i \right) = \\ &= \left(\sum_{i=1}^{N(\alpha)} d_i \mu_i \varphi_i, \sum_{i=1}^{N(\alpha)} d_i \varphi_i \right) = \sum_{i=1}^{N(\alpha)} \mu_i |d_i|^2 < 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Bu ifadəni aşağıdakı kimi göstərə bilərik:

$$(T\varphi, \varphi) = \int_0^{p(\varepsilon)} (T\varphi(x)) \cdot \bar{\varphi}(x) dx + \int_{p(\varepsilon)}^{\infty} (T\varphi(x)) \cdot \bar{\varphi}(x) dx < 0 \quad (24)$$

Göstərək ki,

$$\int_0^{p(\varepsilon)} (T\varphi(x)) \cdot \bar{\varphi}(x) dx \geq 0 \quad (25)$$

Əgər $\int_0^{p(\varepsilon)} |\varphi(x)|^2 dx = 0$ olarsa, onda

$$\left| \int_{p(\varepsilon)}^{\infty} (T\varphi(x))\overline{\varphi(x)}dx \right| \leq \left[\int_{p(\varepsilon)}^{\infty} |T\varphi(x)|^2 dx \right]^{1/2} \cdot \left[\int_{p(\varepsilon)}^{\infty} |\varphi(x)|^2 dx \right]^{1/2} = 0 \quad (27)$$

olar.

Buradan

$$\int_{p(\varepsilon)}^{\infty} T\varphi(x) \cdot \overline{\varphi(x)} dx = 0 \quad (28)$$

alarıq. İndi isə (25) bərabərsizliyini $\int_0^{p(\varepsilon)} |\varphi(x)|^2 dx > 0$ olduğu halda göstərək.

Əksini fərz edək. Tutaq ki,

$$\int_{p(\varepsilon)}^{\infty} (T\varphi(x)) \cdot \overline{\varphi(x)} dx < 0 \quad (29)$$

$y \in L_2[0, \infty)$ üçün

$$\|y\|_1^2 = \int_{p(\varepsilon)}^{\infty} |y(x)|^2 dx \quad (30)$$

götürək. (29) bərabərsizliyindən çıxırı ki,

$$\inf_{\substack{y \in D(T), \\ \|y\|_1=1}} \int_{p(\varepsilon)}^{\infty} (Ty(x)) \cdot \overline{y(x)} dx < 0 \quad (31)$$

Digər tərəfdən

$$\inf_{\substack{y \in D(T), \\ y'(p(\varepsilon))=0, \\ \|y\|_1=1}} \int_{p(\varepsilon)}^{\infty} (Ty(x)) \cdot \overline{y(x)} dx = \inf_{\substack{y \in D(T), \\ \|y\|_1=1}} \int_{p(\varepsilon)}^{\infty} (Ty(x)) \cdot \overline{y(x)} dx \quad (32)$$

olduğu məlumdur. Onda (31) və (32)-dən alarıq:

$$\inf_{\substack{y \in D(T)(L') \\ \|y\|_1=1}} ((L' + \alpha E)y, y) < 0$$

və ya

$$\inf_{\substack{y \in D(T)(L') \\ \|y\|_1=1}} (L'y, y) < -\alpha \leq -\varepsilon. \quad (33)$$

Alışmış bu bərbərsizlik isə teorem 1-ə ziddir. Yəni (25) bərabərsizliyi doğrudur.

Nəticədə

$$\int_0^{p(\varepsilon)} T(y(x)) \cdot \overline{y(x)} dx < 0 \quad (34)$$

olduğunu alırıq.
Əgər

$$(y, \psi_i) = \int_0^{p(\varepsilon)} y(x) \overline{\psi_i(x)} dx \quad (35)$$

olduğunu nəzərə alsaq (34) bərabərsizliyindən alırıq:

$$\inf_{\substack{y \in D(T) \\ \|y\|_2=1, \\ y \perp \psi_i, (i=1,2,\dots,N_1(\alpha))}} \int_0^{p(\varepsilon)} T(y(x)) \cdot \overline{y(x)} dx < 0 \quad (36)$$

Burada

$$\|y\|_2 = \left(\int_0^{p(\varepsilon)} |y(x)|^2 dx \right)^{1/2} \quad (37)$$

(36) bərabərsizliyindən aşağıdakı bərabərsizlik alınır

$$\inf_{\substack{y \in D(T) \\ \|y\|_2=1, \\ y'(0)=y'(p(\varepsilon)), \\ y \perp \psi_i, (i=1,2,\dots,N_1(\alpha))}} \int_0^{p(\varepsilon)} T(y(x)) \cdot \overline{y(x)} dx < 0.$$

Burada isə aşağıdakı bərabərsizlik alınır:

$$\inf_{\substack{y \in D(T_1) \\ \|y\|=1, \\ y \perp \psi_i, (i=1,2,\dots,N_1(\alpha))}} \int_0^{p(\varepsilon)} T(y(x)) \cdot \overline{y(x)} dx < 0 \quad (38)$$

Digər tərəfdən isə

$$\inf_{\substack{y \in D(T_1)=0 \\ \|y\|=1, \\ y \perp \psi_i, (i=1,2,\dots,N_1(\alpha))}} \int_0^{p(\varepsilon)} (T_1(y(x))) \cdot \overline{y(x)} dx = \mu_{(1)(N_1(\alpha)+1)} \geq 0 \quad (39)$$

(38) və (39) bərabərsizlikləri ziddiyyət təşkil edir.

Onda alırıq ki, $N(\alpha) > N_i(\alpha)$, $\alpha \in [\varepsilon, \infty)$ ola bilməz. Yəni istənilən $\alpha \in [\varepsilon, \infty)$ üçün $N(\alpha) \leq N_i(\alpha)$ olmalıdır. Teorem 3 isbat edildi.

Məsələnin qoyuluşuna və işin yerinə yetirilməsində göstərdiyi köməyə görə elmi rəhbərim professor Həmidulla Aslanova öz dərin təşəkkürümü bildirirəm.

ƏDƏBİYYAT

1. Бирман М.Ш. О спектре сингулярных граничных задач. Матем. сборн. (№5), 55(97), 1961, с.125-174.
2. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М.-Л.Гостехиздат, 1951, т.1, 476 с.
3. Laptev N.A. Asymptotics of the negative discrete spectrum of a class of Schrodinger operators with large coupling constant. Proc. Am. Math. Soc. 119 (2), 1993, p.481-488.
4. Laptev A.A., Solomyak M.Z. On the negative spectrum of the two-dimensional Schrodinger operator with radial potential. Commun. Math. Phys. 314 (1), 2012, p.229-241.
5. Левитан Б.М. О разложении по собственным функциям оператора Шредингера в случае неограниченного растущего потенциала. ДАН СССР, 1955, т.103, №2, с.191-194.
6. Rozenbloom G.V. An asymptotics of the negative discrete spectrum of the Schrodinger operators. Math. Notes 21(3), 1977, p.222-227.
7. Скачек Б.Я. Об асимптотике отрицательной части спектра многомерных дифференциальных операторов. Доповіди АН УРСР, 1964, №1, с.14-17.
8. Смирнов В.И. Курс высшей математики. т.5, Изд-во физ-мат. литературы, М.1959, 655с.
9. Титчмарш Е.Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, т.2, М. ИЛ, 1961, 565с.

НЕКОТОРЫЕ НЕРАВЕНСТВА, СВЯЗАННЫМИ С ФУНКЦИЯМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА ПОЛУОСИ

Г.М.ЭЙВАЗЛЫ

РЕЗЮМЕ

В данной статье исследован отрицательный спектр дифференциального оператора второго порядка на полуоси. Получены условия дискретности отрицательного спектра и доказаны некоторые оценки для функции распределения отрицательных собственных значений.

Ключевые слова: Дифференциальный оператор, спектр, собственные значения, функция распределения, самосопряженный оператор, ограниченный снизу оператор, гильбертово пространство.

SOME INEQUALITIES RELATED TO DISTRIBUTION FUNCTIONS OF NEGATIVE EIGEN VALUES OF DIFFERENTIAL OPERATORS ON THE SEMI-AXIS

G.M.EYVAZLI

SUMMARY

In this paper we study the negative spectrum of a second-order differential operator on the semi-axis. Discreteness conditions of the negative spectrum are obtained and some estimates are proved for the distribution function of negative eigenvalues.

Keywords: Differential operator, spectrum, eigen values, distribution function, selfadjoint operator, lower bounded operator, Hilbert space

KƏSR TƏRTİBLİ İNTEQRO-DİFFERENSİAL TƏNLİK ÜÇÜN KOŞI MƏSƏLƏSİNİN ARAŞDIRILMASI

N.Ə.ƏLİYEV, V.Ə.OSMANOV

Bakı Dövlət Universiteti

Saracli@mail.ru

İşdə $\frac{1}{4}$ addımı ilə $\frac{1}{2}$ tərtib törəməli xətti, adi inteqro-differensial tənlik üçün Koşi məsələsinə baxılmışdır. Baxılan Koşi məsələsi ikinci növ Volterra tipli inteqral tənliyə gətirilmişdir. Sonra alınan ikinci növ Volterra tipli inteqral tənliyin həlli ardıcıl yerinə yazma üsulu ilə Neyman sırası şəklində axtarılır. Alınan tənlik volterra tipli olduğundan, Neyman sırasında məxrəcdə faktoriallar yaranır və bu neyman sırası yığılır.

Açar sözlər: Kəsr tərtibdən törəmə, İnteqro-differensial tənlik, Koşi məsələsi, İkinci növ Volterra tipli inteqral tənlik, Ardıcıl yerinə yazma üsulu.

Məlumdur ki, inteqro-differensial tənliklər üçün məsələlər yaxşı araşdırılmışdır. [1]-[3]. Kəsr tərtib törəməli tənliklər üçün də müxtəlif məsələlərə baxılmışdır [4]-[5]. Artıq kəsr tərtibli inteqro-differensial tənliklər üçün də məsələlərə baxılır [6]. Burada da kəsr tərtib, adi, xətti inteqro-differensial tənlik üçün Koşi məsələsinə baxılır. Qoyulmuş məsələnin tənliyi $\frac{1}{4}$ addımı ilə $\frac{1}{2}$ tərtib törəməli inteqro-differensial tənlikdir. Bu inteqro-differensial tənlik iki dəfə $\frac{1}{4}$ tərtibdən inteqrallaşmaqla ikinci növ Volterra tipli inteqral tənliyə gətirilir.

Sonra isə ardıcıl yerinə yazma üsulu ilə bu inteqral tənliyin həlli Neyman sırası şəklində alınır. İnteqral tənlik Volterra tipli olduğundan və Neyman sırasında məxrəcdə faktoriallar yarandığından bu Neyman sırası həmişə yığılır.

Məsələnin qoyuluşu:

$$D^{\frac{1}{2}}y(x) + aD^{\frac{1}{4}}y(x) + by(x) + \int_{x_0}^x K(x, t)y(t)dt = 0 \quad (1)$$

$$y(x_0) = y_0, \quad D^{\frac{1}{4}}y(x) \Big|_{x=x_0} = y_1 \quad 0 < x_0 < x \quad (2)$$

Burada $a, b, y_0, y_1 \in R$, $K(x, t)$ isə kəsilməz funksiyadır.

Bu məsələni həll etmək üçün əvvəlcə tənliyi hər iki tərəfdən $\frac{1}{4}$ tərtibdən inteqrallayırıq:

$$I_{x_0}^{\frac{1}{4}} D^{\frac{1}{2}} y(x) + a I_{x_0}^{\frac{1}{4}} D^{\frac{1}{4}} y(x) + b I_{x_0}^{\frac{1}{4}} y(x) + I_{x_0}^{\frac{1}{4}} \int_{x_0}^x K(x, t) y(t) dt = 0 \quad (3)$$

$$\begin{aligned} D^{\frac{1}{4}} y(x) + C_1 \frac{x^{-1+\frac{1}{4}}}{(-1+\frac{1}{4})!} + a_1 y(x) + a_1 C_2 \frac{x^{-1+\frac{1}{4}}}{(-1+\frac{1}{4})!} \\ + b \int_{x_0}^x \frac{(x-\xi)^{\frac{1}{4}-1}}{(\frac{1}{4}-1)!} y(\xi) d\xi + \int_{x_0}^x \frac{(x-\xi)^{\frac{1}{4}-1}}{(\frac{1}{4}-1)!} d\xi \int_{x_0}^x K(x, t) y(t) dt \\ = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Yenə $\frac{1}{4}$ tərtibdən inteqrallayırıq:

$$\begin{aligned} I_{x_0}^{\frac{1}{4}} D^{\frac{1}{4}} y(x) + C_1 I_{x_0}^{\frac{1}{4}} \frac{x^{-\frac{3}{4}}}{(-\frac{3}{4})!} + a_1 I_{x_0}^{\frac{1}{4}} y(x) \\ + a_1 C_2 I_{x_0}^{\frac{1}{4}} \frac{x^{-\frac{3}{4}}}{(-\frac{3}{4})!} b I_{x_0}^{\frac{1}{4}} \int_{x_0}^x \frac{(x-\xi)^{-\frac{3}{4}}}{(-\frac{3}{4})!} y(\xi) d\xi \\ + I_{x_0}^{\frac{1}{4}} \int_{x_0}^x y(t) dt \int_t^x \frac{(x-\xi)^{-\frac{3}{4}}}{(-\frac{3}{4})!} K(x, t) d\xi \\ = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Bu zaman aşağıdakı ifadəni alırıq:

$$\begin{aligned} y(x) + C_3 \frac{x^{-1+\frac{1}{4}}}{(-1+\frac{1}{4})!} + C_1 \int_{x_0}^x \frac{(x-\xi)^{\frac{1}{4}-1}}{(\frac{1}{4}-1)!} \frac{\xi^{-\frac{3}{4}}}{(-\frac{3}{4})!} d\xi \\ + a_1 \int_{x_0}^x \frac{(x-\xi)^{-\frac{3}{4}}}{(-\frac{3}{4})!} y(\xi) d\xi + a_1 C_2 \int_{x_0}^x \frac{(x-\xi)^{\frac{1}{4}-1}}{(\frac{1}{4}-1)!} \frac{\xi^{-\frac{3}{4}}}{(-\frac{3}{4})!} d\xi \\ + b \int_{x_0}^x \frac{(x-\tau)^{\frac{1}{4}-1}}{(\frac{1}{4}-1)!} d\tau \int_{x_0}^{\tau} \frac{(x-\xi)^{\frac{1}{4}-1}}{(\frac{1}{4}-1)!} y(\xi) d\xi \\ + \int_{x_0}^x \frac{(x-\tau)^{\frac{1}{4}-1}}{(\frac{1}{4}-1)!} d\tau \int_{x_0}^{\tau} y(t) dt \int_t^{\tau} \frac{(\xi-\tau)^{\frac{1}{4}-1}}{(\frac{1}{4}-1)!} K(\xi, t) d\xi \\ = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Burada C_1 , C_2 və C_3 sabitlərini aşağıdakı kimi təyin etmək olar:

$$\begin{aligned} C_1 &= -D^{\frac{1}{4}} y(x) \Big|_{x=x_0} \\ C_2 &= -y(x_0) \end{aligned}$$

$$C_3 = -y(x_0) = C_2$$

Bu əvəzləmədən sonra aşağıdakı kimi ifadə alınır:

$$\begin{aligned}
 y(x) + a_1 \int_{x_0}^x \frac{(x-\xi)^{-\frac{3}{4}}}{\left(-\frac{3}{4}\right)!} y(\xi) d\xi + b \int_{x_0}^x y(\xi) d\xi \int_{\xi}^x \frac{(x-\tau)^{-\frac{3}{4}} (x-\xi)^{-\frac{3}{4}}}{\left(-\frac{3}{4}\right)! \left(-\frac{3}{4}\right)!} d\tau \\
 + \int_{x_0}^x y(t) dt \int_t^x \frac{(x-\tau)^{-\frac{3}{4}}}{\left(-\frac{3}{4}\right)!} d\tau \int_t^{\tau} \frac{(\tau-\xi)^{-\frac{3}{4}}}{\left(-\frac{3}{4}\right)!} K(\xi, t) d\xi \\
 = y(x_0) \frac{x^{-\frac{3}{4}}}{\left(-\frac{3}{4}\right)!} + D^{\frac{1}{4}} y(x) \Big|_{x=x_0} \int_{x_0}^x \frac{(x-\xi)^{-\frac{3}{4}} \xi^{-\frac{3}{4}}}{\left(-\frac{3}{4}\right)! \left(-\frac{3}{4}\right)!} d\xi \\
 + a_1 y(x_0) \int_{x_0}^x \frac{(x-\xi)^{-\frac{3}{4}} \xi^{-\frac{3}{4}}}{\left(-\frac{3}{4}\right)! \left(-\frac{3}{4}\right)!} d\xi \tag{7}
 \end{aligned}$$

Əgər burada bütün t-ləri ξ ilə əvəz eləsək və müəyyən çevirmələr aparsaq alarıq:

$$\begin{aligned}
 y(x) + \int_{x_0}^x \left[a_1 \frac{(x-\xi)^{-\frac{3}{4}}}{\left(-\frac{3}{4}\right)!} + b \int_{\xi}^x \frac{(x-\tau)^{-\frac{3}{4}} (x-\xi)^{-\frac{3}{4}}}{\left(-\frac{3}{4}\right)! \left(-\frac{3}{4}\right)!} d\tau \right. \\
 \left. + \int_{\xi}^x \frac{(x-\tau)^{-\frac{3}{4}}}{\left(-\frac{3}{4}\right)!} d\tau \int_{\xi}^{\tau} \frac{(\tau-t)^{-\frac{3}{4}}}{\left(-\frac{3}{4}\right)!} K(t, \xi) dt \right] y(\xi) d\xi = y(x_0) \frac{x^{-\frac{3}{4}}}{\left(-\frac{3}{4}\right)!} \\
 + D^{\frac{1}{4}} y(x) \Big|_{x=x_0} \int_{x_0}^x \frac{(x-\xi)^{-\frac{3}{4}} \xi^{-\frac{3}{4}}}{\left(-\frac{3}{4}\right)! \left(-\frac{3}{4}\right)!} d\xi \\
 + a_1 y(x_0) \int_{x_0}^x \frac{(x-\xi)^{-\frac{3}{4}} \xi^{-\frac{3}{4}}}{\left(-\frac{3}{4}\right)! \left(-\frac{3}{4}\right)!} d\xi
 \end{aligned}$$

ƏDƏBİYYAT

1. Aliyev N.A, Pashavand A.A, A boundary value problem for a fractional order ordinary linear differential equation with a constant coefficient. Proceedings of the Institute of Applied mathematics Azerbaijan, Baku, v. 4, №1, 2015, p.3-8.
2. Pashavand A.A, Aliyev N.A, A problem for fractional ordinary singular order linear differential equation with constant coefficient and general boundary condition. Abstracts of Azerbaijan-Turkey-Ukrainian International conference mathematical analysis. Differential equations and their applications, Baku, Azerbaijan, 2015, p.133.
3. Jahanshahi m., Aliyev N.A. Boundary value problem for real order differential equations, Caucasian mathematical conference CMC I Book of abstracts, Georgia, Tbilisi, 2014, p109.
4. Ahmadhanli A, Jahanshahi m, Aliyev N.A, Boundary value problems for real order differential equations. 4-nd Annual Iranian Mathematical conference University of Tabriz, Iran 2012, p.482-485.

5. Fatemi m, Aliyev N.A, Shahmorad S. Existence and Uniqness of solution for a farctionla order Integro-Differential equation with non-local and Global boundary conditions, Scientific Research Applied Mathematics, 2011, 2, p1292-1296.
6. Xiao-Jun Yang, Feng gao, H.m. Srivastava, Exact treavellingwave solutions for the local fractional two-dimensional Burgers type equations, Computers and mathematics with applications73(2017) 203-210., Elsevier.
7. Xiao-Jun Jang, Zhi-Zhen Zhang, H.m Srivastava, Some new applicationsfor heat and fluid flows with fractional derivatives without singular kernel. Arxiv: 1601.06/144v2[math.AP], 20 apr 2016., p.1-7.
8. Сфмко С.Г, Килбас А.А, Маричев О.Н, Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения-Минск: Наука и техника, 1987, 780 с.
9. Pashavand A.A, Aliyev N.A, A Boundary Value Problem for an Irrational Order Partial Differential Equation, Caspian Journal of Applied Mathematics, Ecology and economics, Aserbaijan, Baku, v.3, № 2015, 131-136.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ДРОБНО-ИНТЕГРАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Н.А.АЛИЕВ, В.А.ОСМАНОВ

РЕЗЮМЕ

В данной работе рассматривается задача Коши для обыкновенного интегрально-дифференциального уравнения, линейной производной с шагом $1/4$ и $1/2$ порядка. Рассматриваемая задача Коши сводится ко второму типу интегральных уравнений типа Вольтерра. Затем решение второго типа интегрального уравнения типа Вольтерра ищется в виде последовательности Неймана путем последовательной подстановки. Поскольку полученное уравнение относится к типу Вольтерра, факториалы формируются на знаменателе ряда Неймана, и этот ряд Неймана сходится.

Ключевые слова: производная дробного порядка, интегро-дифференциальное уравнение, задача Коши, интегральное уравнение типа Вольтерра второго типа, метод последовательной подстановки.

INVESTIGATION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR FRACTIONAL INTEGRAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

N.A.ALIYEV, V.A.OSMANOV

SUMMARY

In this work, the Cauchy problem for a Elementary integro-differential equation, a linear derivative with a $1/4$ step and a $1/2$ order, is considered. The Cauchy problem under consideration is reduced to a second type of Volteire-type integral equation. The solution of the second type of Volteire-type integral equation is then sought in the form of a Neumann sequence by sequential substitution. Since the resulting equation is of the Volteire type, factorials are formed on the denominator in the Neumann series, and this Neumann series converge.

Key words: Derivative of fractional order, Integro-differential equation, Cauchy problem, Volteire type integral equation of the second type, Sequential substitution method.

İNFORMATİKA

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ВОДОГАЗОВОГО
ВОЗДЕЙСТВИЯ НА ГЛИНИСТЫЙ НЕФТЯНОЙ ПЛАСТ

С.В.АГАЛАРОВА

*SOCAR, Нефтегазовый научно-исследовательский
проектный институт,
sanubar.gambarova@gmail.com*

На базе трехфазной многокомпонентной модели фильтрации флюидов выполнено моделирование процесса водогазового воздействия на глинистый нефтяной пласт, позволяющее учитывать все происходящие физико-химические процессы. На основе моделирования исследованы возможности повышения коэффициента извлечения нефти за счет роста коэффициента вытеснения с увеличением подвижности пластовой нефти, а также за счет повышение коэффициента охвата на основании цикличности метода.

Ключевые слова: водогазовое воздействие, трехфазная смесь, глинистый нефтяной пласт, коэффициент извлечения нефти, давление.

При разработке месторождения нефти и газа более половины запасов остается не извлеченным. В связи с этим, весьма актуальным представляется внедрение новых эффективных способов оптимизации процесса разработки и закачки новых агентов в пласт для увеличения объемов извлекаемых запасов. Одним из таких способов является применение водогазового воздействия (ВГВ) для повышение выработки не извлекаемых запасов нефти.

Водогазовое воздействие является одним из методов по увеличению нефтеотдачи продуктивных пластов. Этот метод объединяет в себе все ключевые преимущества отдельного нагнетания воды и газа. А именно, достигается высокий коэффициент вытеснения нефти, присущий нагнетанию газа в пласт, а малый коэффициент охвата вытеснением нивелируется закачкой воды, кроме того, при закачке водогазовой смеси не происходит прорыва газа по высокопроницаемым пропласткам. Также при использовании ВГВ происходит выравнивание профиля приемистости прискважинной части пласта вблизи нагнетательной скважины. Успешность реализации способа водогазового воздействия определяется не только геологическими критериями его применимости, но и, во многом, зависит от свойств и состава агента воздействия, способа его подготовки, согласованности режимов нагнетания и отбора по реагирующему

участку. Кроме того, при наличии газа разного состава, закачиваемая водогазовая смесь может изменять нефтewытесняющую способность, например, путем подачи сухого или жирного газа [1-4].

При рассмотрении вопроса интенсификации выработки запасов нефти водогазовым воздействием на пласт существует ряд нерешенных задач, одна из которых связана с определением эффективности вытеснения нефти на постоянных и циклических режимах закачки водогазовой смеси.

Целью работы является моделирование водогазового воздействия на глинистый нефтяной пласт и на его основе определение возможностей интенсификации выработки запасов нефти на различных режимах закачки.

Постановка задачи. Рассмотрим задачу вытеснения нефти из глинистого пласта водогазовой смесью, в которой вода имеет различный минералогический состав, а газ добавлен в оптимальном объемном соотношении. Принимаем, что в пласте размещены добывающие и нагнетательные скважины. На нагнетательной скважине задано количество закачиваемой водогазовой смеси, а на добывающей скважине задан суммарный отбор по трем фазам. По известным состояниям пласта требуется определить технико-технологических показателей разработки в режиме процесса вытеснения.

Изотермическое течение трехфазной смеси в пористой среде описывается следующей системой дифференциальных уравнений, полученных объединением уравнений неразрывности по каждому трех фаз и обобщенного закона Дарси, используя допущение о локальном термодинамическом равновесии фаз [5-7]:

$$\nabla \left[kh \left(\frac{f_u(s_u, s_z)}{\mu_u} \rho_u l_i \nabla p_u + \frac{f_z(s_z)}{\mu_z} \rho_z g_i \nabla p_z \right) \right] = \frac{\partial}{\partial t} [hm(\rho_u s_u l_i + \rho_z s_z g_i)] + \sum_{j=1}^{n_1} (Q_{uj}^i(t) + Q_{zj}^i(t)) \delta(x - x_j^3, y - y_j^3), \quad i = 1, 2, \dots, N; (x, y) \in D, \quad t \in (0, T), \quad (1)$$

$$\nabla \left[kh \left(\frac{f_g(s_g, c)}{\mu_g} \rho_g \nabla p_g + \frac{f_z(s_z)}{\mu_z} \rho_z g_g \nabla p_z \right) \right] = \frac{\partial}{\partial t} [hm(\rho_g s_g + \rho_z s_z g_g + \rho_g \omega)] + \sum_{l=1}^{n_2} (Q_{dl}(t) + Q_{zl}(t)) \delta(x - x_l^h, y - y_l^h) + \sum_{j=1}^{n_1} Q_{gj}(t) \delta(x - x_j^3, y - y_j^3),$$

$$\sum_{l=1}^N l_i = 1, \sum_{l=1}^N g_i + g_g = 1, s_u + s_z + s_g = 1, (x, y) \in D, \quad t \in (0, T), \quad (2)$$

$$\nabla \left(khc \frac{f_g \rho_g}{\mu_g} \nabla p_g \right) + \frac{\partial}{\partial t} [h(mcs_g + a)\rho_g] =$$

$$= \nabla(h\rho_\epsilon D(s_\epsilon, c)\nabla c) + \sum_{l=1}^{n_2} cQ_{dl}(t)\delta(x-x_l^u, y-y_l^u), \quad (3)$$

$$P_n = P_z - P_{cнз}, P_\epsilon = P_z - P_{cгз}, (x, y) \in D, t \in (0, T), \quad (4)$$

$$p_\epsilon(x, y, t)|_{t=0} = p_{\epsilon 0}(x, y), z_i(x, y, t)|_{t=0} = z_{i0}(x, y), i = \overline{1, N+1};$$

$$c(x, y, t)|_{t=0} = c_0(x, y), (x, y) \in D, \quad (5)$$

$$\left. \frac{\partial p_\epsilon}{\partial x} \right|_{x=0, l_x} = \left. \frac{\partial p_n}{\partial x} \right|_{x=0, l_x} = \left. \frac{\partial c}{\partial x} \right|_{x=0, l_x} = 0, 0 \leq y \leq l_y,$$

$$\left. \frac{\partial p_\epsilon}{\partial y} \right|_{y=0, l_y} = \left. \frac{\partial p_n}{\partial y} \right|_{y=0, l_y} = \left. \frac{\partial c}{\partial y} \right|_{y=0, l_y} = 0, 0 \leq x \leq l_x, \quad (6)$$

где $\rho_\epsilon, \rho_n, \rho_z$ - плотность водяной, нефтяной и газовой фазы соответственно; l_i, g_i - мольные доли i -го компонента в нефтяной и газовой фазы; g_ϵ -водный компонент в смеси; c -концентрация соли; z_i - мольные доли i -го компонента в смеси; $m = m(c, s_\epsilon)$ -пористость; $k = k(c, s_\epsilon)$ -абсолютная проницаемость; s_ϵ, s_n, s_z - насыщенность водяной, нефтяной и газовой фазой соответственно; $f_\epsilon(s_\epsilon), f_n(s_n), f_z(s_z)$ - относительная фазовая проницаемость водяной, нефтяной и газовой фазы соответственно; $\mu_\epsilon, \mu_n, \mu_z$ - вязкость водяной, нефтяной и газовой фазы соответственно; P_ϵ, P_n, P_z -давление в водяной, нефтяной и газовой фазе соответственно; $P_{cнз}, P_{cгз}$ -капиллярное давление на контакте нефть-газ и вода-газ; $\omega = \omega(c, s_\epsilon)$ - параметр, характеризующее количество поглощенной глинами воды; a -количество сорбированных солей; $D(s_\epsilon, c)$ -коэффициент диффузии; l_x, l_y - длина и ширина пласта; h - толщина пласта; $Q_{\epsilon j}(t), Q_{nj}(t)$ и $Q_{zj}(t)$ - дебиты добывающих скважин по водяной, нефтяной и газовой фазы соответственно; $Q_{dl}(t)$ и $Q_{zj}(t)$ - объемные расходы нагнетательных скважин по водяной и газовой фазы соответственно; n_1 и n_2 - число эксплуатационных и нагнетательных скважин; $\delta(\cdot)$ -функция Дирака; (x_j^z, y_j^z) и (x_l^u, y_l^u) - координаты j -ой эксплуатационной и l -ой нагнетательной скважины; ∇ - оператор Гамильтона; D - область фильтрации; T - время разработки; t - время.

Неизвестными в системе уравнений (1)-(6) являются давление в водяной фазе p_ϵ , мольные доли в смеси z_i ($i = \overline{1, N+1}$) и концентрация соли в водной фазе c .

Метод решения задачи. С учетом выполнения условия $\sum_{i=1}^N l_i = 1, \sum_{i=1}^N g_i + g_\epsilon = 1$, суммированием уравнений системы (1) и (2) по всем i , получаем следующее уравнение сохранения массы смеси:

$$\begin{aligned} \nabla\{kh\alpha \cdot \nabla p_\epsilon\} + \nabla\{kh\eta \cdot \nabla p_{c\epsilon}\} - \nabla\{kh\gamma \cdot \nabla p_{cнз}\} = & \frac{\partial}{\partial t} [mh\varphi] + \sum_{j=1}^{n_1} \overline{Q}_j(t) \delta(x - x_j^3, y - y_j^3) \\ & + \sum_{l=1}^{n_2} (Q_{el}(t) + Q_{cl}(t)) \delta(x - x_l^h, y - y_l^h), \quad \overline{Q}_j(t) = \sum_{i=1}^N (Q_{ij}^i(t) + Q_{ej}^i(t)) + Q_{ej}(t). \end{aligned} \quad (7)$$

Тогда система (1)-(4) будет эквивалента следующей системе:

$$\begin{aligned} \nabla\{kh\alpha \cdot \nabla p_\epsilon\} + \nabla\{kh\eta \cdot \nabla p_{c\epsilon}\} - \nabla\{kh\gamma \cdot \nabla p_{cнз}\} = & \frac{\partial}{\partial t} [mh\varphi] + \sum_{j=1}^{n_1} \overline{Q}_j(t) \delta(x - x_j^3, y - y_j^3) \\ & + \sum_{l=1}^{n_2} (Q_{el}(t) + Q_{cl}(t)) \delta(x - x_l^h, y - y_l^h), \quad \overline{Q}_j(t) = \sum_{i=1}^N (Q_{ij}^i(t) + Q_{ej}^i(t)) + Q_{ej}(t), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \nabla\{kh\alpha_{i,z_i} \cdot \nabla p_\epsilon\} + \nabla\{kh\eta_{i,z_i} \cdot \nabla p_{c\epsilon}\} - \nabla\{kh\gamma_{i,z_i} \cdot \nabla p_{cнз}\} = & \frac{\partial}{\partial t} [mh\varphi_{i,z_i}] + \\ & + \sum_{j=1}^{n_1} (Q_{ij}^i(t) + Q_{ej}^i(t)) \delta(x - x_j^3, y - y_j^3), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (x, y) \in D, \quad t \in (0, T), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \nabla\{kh(\lambda_\epsilon + \alpha_{N+1} z_{N+1}) \cdot \nabla p_\epsilon\} + \nabla\{kh(\alpha_{N+1} z_{N+1}) \cdot \nabla p_{c\epsilon}\} = & \frac{\partial}{\partial t} [mh(\lambda_\epsilon + \alpha_{N+1} z_{N+1}) + \rho_\epsilon \omega] + \\ & + \sum_{l=1}^{n_2} (Q_{el}(t) + Q_{cl}(t)) \delta(x - x_l^h, y - y_l^h) + \sum_{j=1}^{n_1} Q_{ej}(t) \delta(x - x_j^3, y - y_j^3), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \nabla[khc\lambda_\epsilon \nabla p_\epsilon] + \frac{\partial}{\partial t} [h(mcs_\epsilon + a)\rho_\epsilon] = \\ = \nabla(h\rho_\epsilon D(s_\epsilon, c) \nabla c) + \sum_{l=1}^{n_2} c Q_{el}(t) \delta(x - x_l^h, y - y_l^h), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\text{Здесь } \alpha_i = \frac{1}{F_h(1 - k_i^{(1)}) + F_\epsilon \left(\frac{k_i^{(1)}}{k_i^{(2)}} - k_i^{(1)} \right) + k_i^{(1)}} (\lambda_h + k_i^{(1)} \lambda_\epsilon + \lambda_\epsilon),$$

$$\lambda_h = \frac{f_h \rho_h}{\mu_h}; \lambda_\epsilon = \frac{f_\epsilon \rho_\epsilon}{\mu_\epsilon};$$

$$\lambda_{\theta} = \frac{f_{\theta} \rho_{\theta}}{\mu_{\theta}}; \eta_i = \frac{1}{F_n(1 - k_i^{(1)}) + F_{\theta} \left(\frac{k_i^{(1)}}{k_i^{(2)}} - k_i^{(1)} \right) + k_i^{(1)}} (\lambda_n + k_i^{(1)} \lambda_{\theta}); \alpha = \sum_{i=1}^N \alpha_i;$$

$$\eta = \sum_{i=1}^N \eta_i; \gamma_i = \frac{1}{F_n(1 - k_i^{(1)}) + F_{\theta} \left(\frac{k_i^{(1)}}{k_i^{(2)}} - k_i^{(1)} \right) + k_i^{(1)}} \lambda_n; \gamma = \sum_{i=1}^N \gamma_i;$$

$$\varphi = (\rho_n s_n + \rho_{\theta} s_{\theta} + \rho_{\theta} s_{\theta} + \rho_{\theta} \omega);$$

$$\varphi_i = \frac{1}{F_n(1 - k_i^{(1)}) + F_{\theta} \left(\frac{k_i^{(1)}}{k_i^{(2)}} - k_i^{(1)} \right) + k_i^{(1)}} (\rho_n s_n + k_i^{(1)} \rho_{\theta} s_{\theta});$$

$$z_i = l_i F_n + g_i F_{\theta} + g_{\theta} F_{\theta}; \quad z_{N+1} = g_{\theta};$$

$$\alpha_{N+1} = \frac{1}{k_{N+1}^{(2)} (F_n(1 - k_{N+1}^{(1)}) + F_{\theta} \left(\frac{k_{N+1}^{(1)}}{k_{N+1}^{(2)}} - k_{N+1}^{(1)} \right) + k_{N+1}^{(1)}} k_{N+1}^{(1)} \lambda_{\theta};$$

$$s_{\theta} = \frac{(1 - F_n - F_{\theta}) \rho_{\theta}}{(1 - F_n - F_{\theta}) \rho_{\theta} + (1 - F_{\theta} - F_{\theta}) \rho_n + (1 - F_n - F_{\theta}) \rho_{\theta}};$$

$$s_{ж} = \frac{(1 - F_{\theta} - F_{\theta}) \rho_n}{(1 - F_{\theta} - F_{\theta}) \rho_n + (1 - F_{\theta} - F_n) \rho_{\theta} + (1 - F_n - F_{\theta}) \rho_{\theta}};$$

$k_i^{(1)}$ и $k_i^{(2)}$ -коэффициенты распределения i -го компонента между фазами нефть-газ и вода-газ; $F_n, F_{\theta}, F_{\theta}$ -молярная доля нефтяной, водяной и газовой фазы в смеси.

Для решения гидродинамической задачи (8)-(11), (5)-(6) была использована схема “неявная по давлению в водяной фазе и явная по составу смеси и концентрацию соли в водной фазе”. Из уравнение (8) $p_{\theta}(x, y, t)$ определяется итерационным поточечным методом Якоби, а из системы (9) и (10) $z_i(x, y, t)$, $z_{N+1}(x, y, t)$ и из уравнение (11) $c(x, y, t)$ определяются методом Эйлера[8]. На основе $z_i(x, y, t)$, $z_{N+1}(x, y, t)$ рассчитывается l_i, g_i, g_{θ} , и, с использованием уравнений состояния фаз [9], идентифицируется $\rho_{\theta}, \rho_n, \rho_{\theta}$ и определяются $s_{\theta}, s_n, s_{\theta}$.

Прогнозирование нефтеотдачи процесса вытеснения нефти водогазовой смесью в глиносодержащих коллекторах. На основе предложенных фильтрационных моделей были проведены расчеты по вытеснению нефти водогазовой смесью из глинистых пластах, в которых работает одна нагнетательная и одна добывающая скважина. Размеры модели - 250м · 250м. Начальные значения пластовых температур и давлений рав-

ны 90 °С и 26 МПа, соответственно. Моделируемый участок представляет собой чисто нефтяную зону. Плотность нефти в поверхностных условиях задана равной 0,857 т/м³. Вязкость нефти в пластовых условиях составляет 10,4 мПа·с, а газосодержание - 18,5 м³/м³. Толщина пласта составляет 20 м, а коэффициенты песчаности и глинистости - 0,6 и 0,12 и коэффициент начальной нефтенасыщенности - 0,8. В нагнетательную скважину закачивалась смесь воды и газа с забойным давлением 35 МПа. Содержание газа в смеси около 25 % в пластовых условиях.

Пластовая нефть пласта характеризовалась следующим начальным усредненным составом (молярная доля, %): метан 20,88; этан 2,82; пропан 1,69; бутан 1,12; пентан 1,05; C₆₊- 66,12; N₂ - 0,99; CO₂ - 0,33.

В расчетах для значений параметров модели пласта и характеризующих физических свойств фаз, соответствующих на доли компонентов, были использованы следующие исходные данные [10,11]:

$$l_x = 250\text{м}; l_y = 250\text{м}. m_0 = 0.2; k_0 = 0,034\text{мкм}^2;$$

$$m = m_0(1 - Bs_g); k = k_0(1 - Bs_g); B = 0,4; c_0(x, y) = 0.15; s_{g0}(x, y) = 0.2;$$

$$f_n(s_n, s_g) = \left(\frac{s_n + s_g - 0.2}{0.6} \right)^3; f_g(s_g) = 0.9 \cdot (s_g)^{2.89};$$

$$f_g(s_g, c) = \frac{c+l}{l} \left(\frac{s_g - 0.2}{0.8} \right)^3; \frac{c+l}{l} = \gamma = 4.6;$$

$$D(s_g, c) = D_0 \cdot (2 - s_g); D_0 = 10^{-5} \text{ м}^2/\text{сек}.$$

$$p_{ck}(s_l) = \Pi \cdot J(s_l); J(s_l) = \frac{0.2(0.9 - s_l)}{(1.2 - s_l)^2(2s_l - s_l^2)}; (l = n, g);$$

$$\Pi = 10^5 \text{ Па}.$$

Объемы закачки воды и газа, соответственно, принимались: Q_г = 30 м³/сут., Q_в = 7,5 м³/сут. - при постоянном (стационарном) режиме закачки и Q_г = 60 м³/сут., Q_в = 15 м³/сут. - при циклическом режиме закачки (с периодом нагнетания 15 суток/месяц). На обоих режимах в продуктивный пласт закачивались одинаковые объемы водогазовой смеси.

Результаты расчетов представлены на рис.1-4. На рис.1 приведены графики изменения вязкости нефти во времени по вариантам постоянного и циклического воздействия. Видно, что при стационарной закачке водогазовой смеси происходит постоянное насыщение нефти газом. При этом происходит кратковременное перенасыщение нефти газовой фазой, что обуславливает медленное снижение вязкости нефти в продуктивном пласте.

При циклическом воздействии насыщение в пласте нефти газом носит импульсный характер, и процесс перенасыщения нефти происходит

значительно позднее. Кроме того, в ходе циклического воздействия работает механизм вовлечения в разработку запасов нефти низкопроницаемых зон пласта (рост коэффициента охвата пласта), в результате чего увеличивается объемная составляющая, подвергаемая воздействию газовой фазы, который способствует увеличению подвижности нефти.

На рис.2 представлена зависимость коэффициента вытеснения нефти от ее подвижности для различных режимов закачки водогазовой смеси. Видно, что коэффициент вытеснение в пределах значений подвижности нефти от 0,001 до 0,005 $\text{мкм}^2/\text{мПа}\cdot\text{с}$ интенсивно растет, а затем, с увеличением подвижности нефти, интенсивность роста снижается.

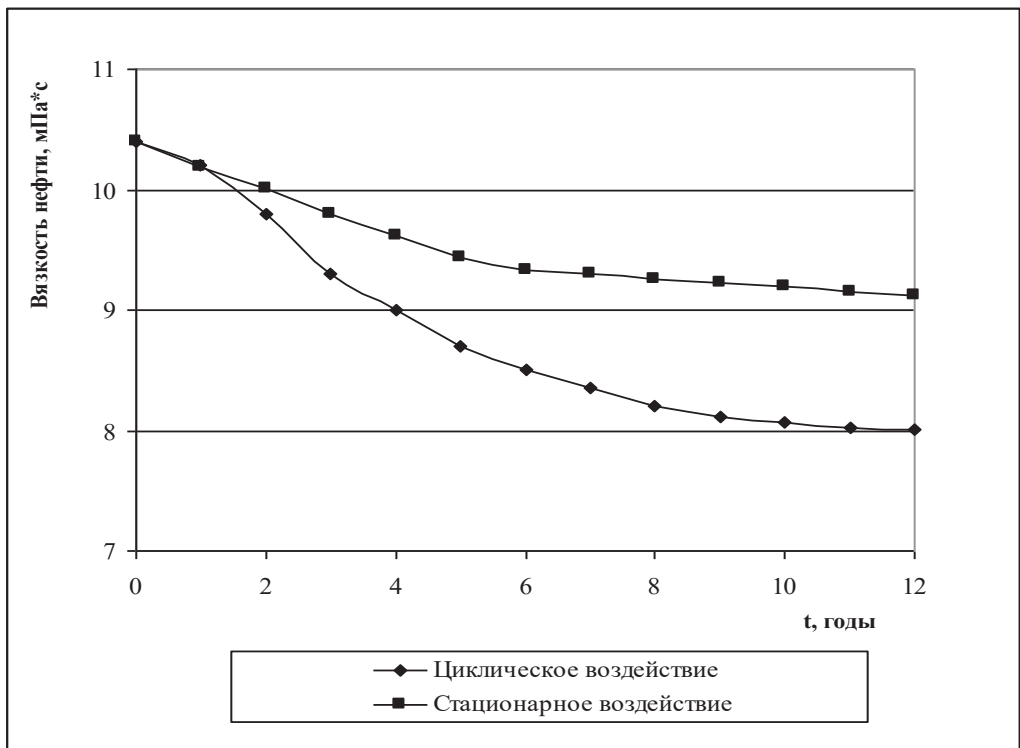


Рис.1. Динамика изменения вязкости нефти водогазового воздействия в стационарном и циклическом режимах

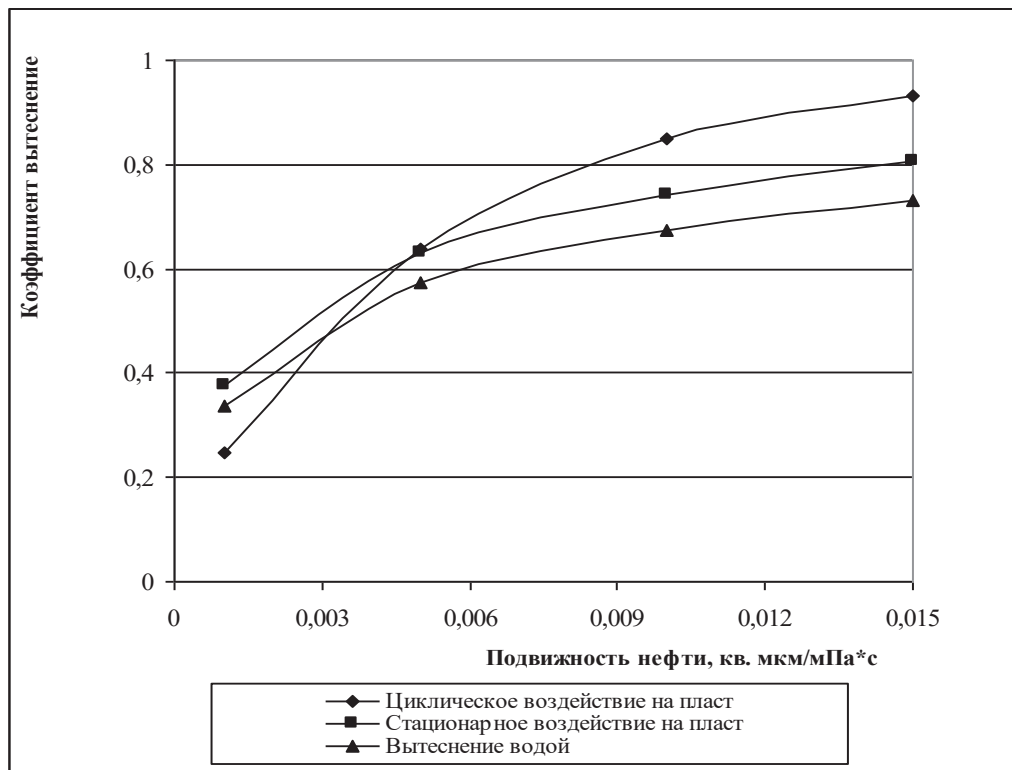


Рис.2. Зависимость коэффициента вытеснения нефти водогазовой смесью на различных режимах и водой от коэффициента подвижности нефти

Когда фильтруется только вода, то интенсивность отбора обусловлена только вытесняющими свойствами воды, когда же в процесс вытеснения добавляется газ, то происходит изменение подвижности нефти за счет насыщения ее газом. Более интенсивное изменение подвижности нефти в случае циклического воздействия обуславливает более полное вытеснение. При циклическом воздействии на пласт происходит наилучшее вытеснение нефти, когда численное превосходство, по сравнению с стационарным воздействием, выражается величиной около 6,7 %.

На рис.3 представлены динамики изменения в зависимости от времени дебитов и коэффициентов извлечения нефти на стационарном и циклическом режимах закачки. Анализ представленных динамик показывают, что лучшие показатели характерны для циклического воздействия. Эффективность водогазового воздействия, обусловленная увеличением коэффициента вытеснения, в большей мере, обеспечивается как за счет снижения вязкости нефти, в то время как за счет увеличения коэффициента охвата, при котором большую роль играет цикличность воздействия и набухание глинистого материала коллектора.

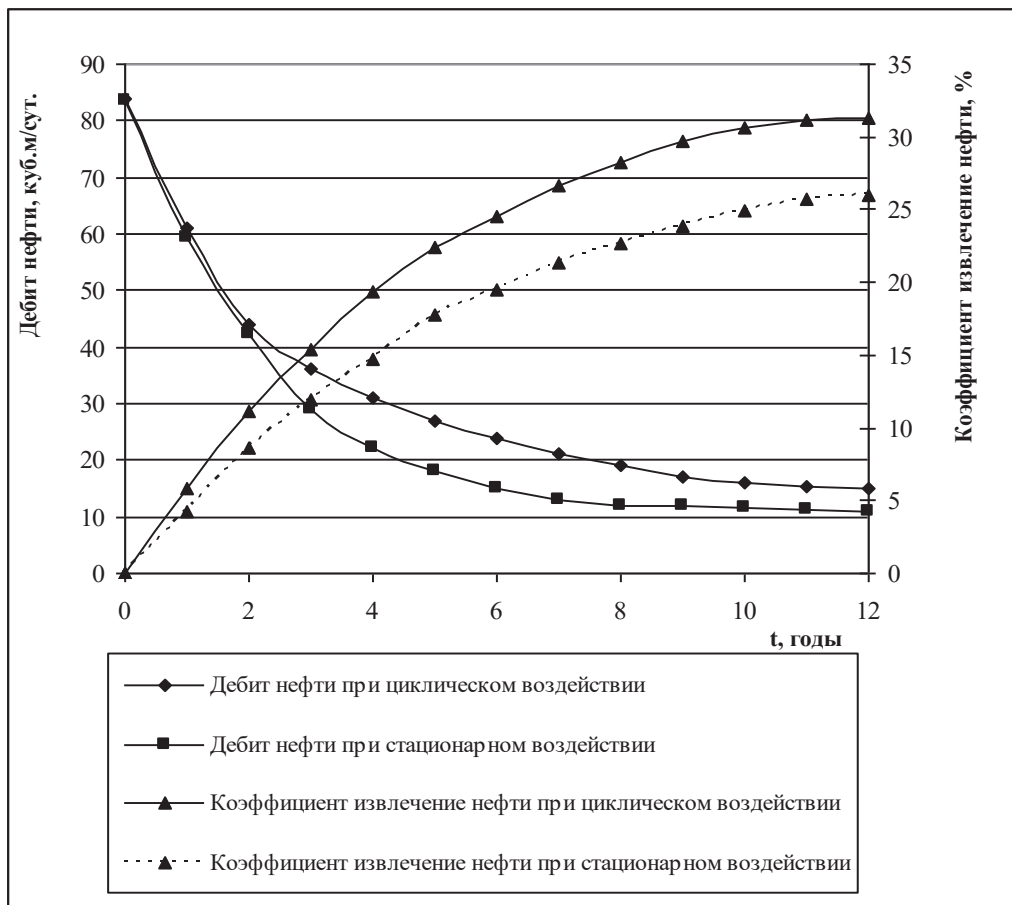


Рис.3. Динамика основных показателей эксплуатации по вариантам стационарного и циклического воздействия

На рис.4 представлены динамики изменения обводненности в зависимости от времени по вариантам стационарного и циклического воздействия. Анализ представленных динамик показывают, что на стационарном режиме закачки наблюдается скоротечное прорывное обводнение скважины и более сдержанное обводнение при циклическом режиме. Обводнение при циклическом режиме происходит менее интенсивно в связи с подключением низкопроницаемых глинистых участков пласта.

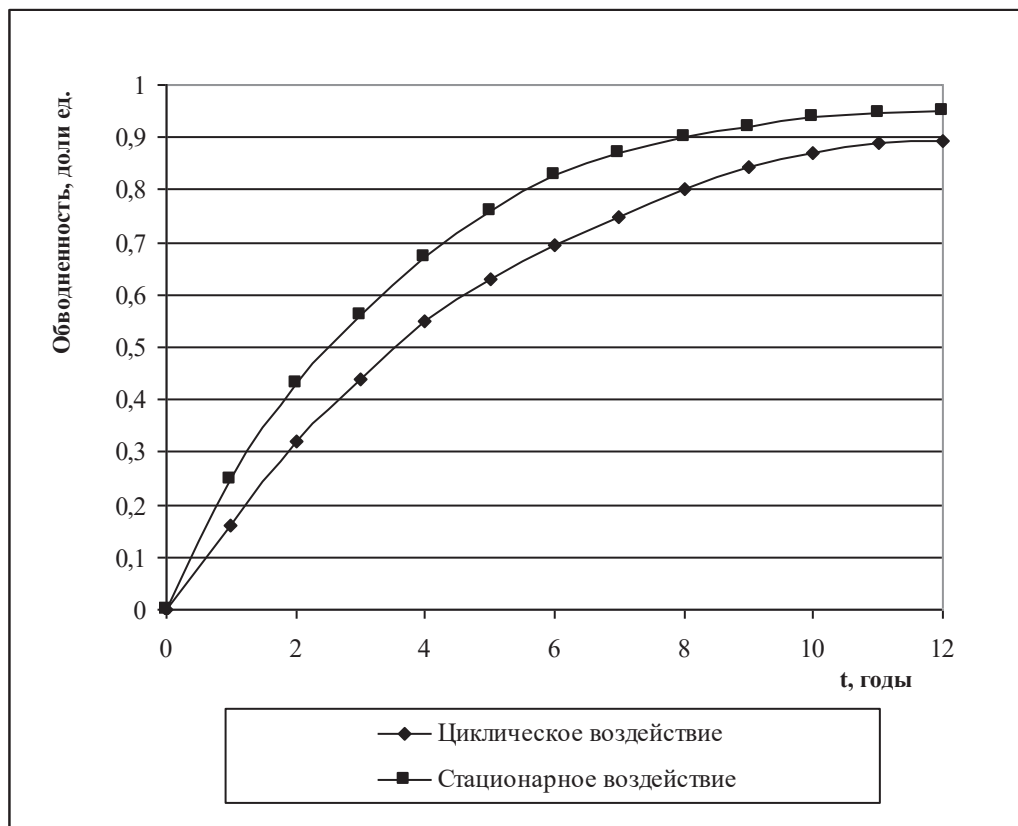


Рис.4. Динамики изменения обводненности в зависимости от времени по вариантам стационарного и циклического воздействия

Таким образом, установлено, что циклическое водогазовое воздействие носит комплексный эффект повышения коэффициента извлечения нефти за счет роста коэффициента вытеснения с увеличением подвижности пластовой нефти, а также за счет повышения коэффициента охвата на основании цикличности метода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кокорев В.И. Газовые методы - новая технология увеличения нефтеотдачи пластов // Нефтепромысловое дело, 2009, № 11, с. 24–27
2. Степанова Г.С. Газовые и водогазовые методы воздействия на нефтяные пласты. М.: Газойл-пресс, 2006, 199 с.
3. Зацепин В.В., Максудов Р.А. Основные факторы, определяющие эффективность водогазового воздействия с одновременной закачкой воды и газа // Нефтепромысловое дело, 2008, № 10, с.18–24
4. Ермаков П.П., Еремин Н.А. Нагнетание азота для увеличения нефтеотдачи // Геология, геофизика и разработка нефтяных месторождений. 1996, № 11, с. 45-50.
5. Аббасов З.Я., Джалалов Г.И., Фейзуллаев Х.А., Дамиров А. А. Численный алгоритм решения процесса воздействия на газоконденсатную залежь комбинированной закачкой газа и воды// Изв. НАН Азерб., серия Наук о Земле, 2013, №1, с.56-66

6. Feyzullaev Kh. A., Khalilov M. S. Numerical modeling of the water-gas stimulation of a gas-condensate stratum in the final stage of development // Journal of Engineering Physics and Thermophysics, Vol. 92, No. 5, 2019, pp.1214-1224
- 7.Фейзуллаев Х.А. Совершенствование моделирования гидрогазодинамических основ разработки глубокозалегающих газоконденсатных месторождений. Beau Bassin: Palmarium Academic Publishing, 2018. – 228 с. ISBN 978-620-2-38166-6
- 8.Азиз Х., Сеттари Э. Математическое моделирование пластовых систем: Пер. с английского. М.: Недра, 1982. 407 с.
9. Брусиловский А.И. Фазовые превращения при разработке месторождений нефти и газа. М.: Грааль, 2002, 575 с.
- 10.Фейзуллаев Х.А., Агаларова С.В. Математическое моделирование процесса вытеснения нефти водой в глиносодержащих коллекторах с учетом набухания глин // АНХ, №10, 2019, с.26-32
11. Feyzullayev Kh.A., Khalilov M.S., Kuliev E.A. Parametric identificational determination of the functions of relative phase permeabilities of qazcondensate deposits in water displacement mode. Proceedings of the 6th International Conference on control and optimization with industrial applications, COIA2018, July 11-13, 2018, Baku, vol.I, pp.167-169

GİLLİ NEFT LAYINA SU-QAZ QARIŞIĞI İLƏ TƏSİR PROSESİNİN MODELLƏNDİRİLMƏSİ

S.V.AĞALAROVA

XÜLASƏ

Fluidlərin süzülməsinin üç fazlı çoxkomponentli modeli bazasında gil saxlayan neftli laya su-qaz qarışığı ilə təsirinbaş verən bütün fiziki - kimyəvi proseslərini nəzərə almağa imkan verən modelləşdirilməsi yerinə yetirilmiş və onun əsasında lay neftinin hərəkətliliyinin artırılması hesabına sıxışdırılma əmsalının, həmçinin təsir üsulunun növbəliyinə əsasən əhatə əmsalının artırılmasına hesabına neftin çıxarılma əmsalının artırılması imkanları araşdırılmışdır.

Açar sözlər: su-qazla təsir, üçfazlı qarışıq, gilli neft layı, neftin çıxarılma əmsalı, təzyiq.

MODELLING OF THE PROCESS OF WATER-GAS STIMULATION ON A CLAY BEARING OIL LAYER

S.V.AGHALAROVA

SUMMARY

Modelling of the process of water-gas stimulation on a clay bearing oil layer has been carried out within the scope of a three-phase multi-component model of fluid filtration, which allows taking into account all ongoing physical and chemical processes. Based on this, the possibilities of the increase of oil recovery coefficient due to growth of displacement efficiency by improving of formation oil mobility and the coverage factor due to method cyclicality are investigated.

Keywords: water-gas stimulation, three-phase mixture, clay bearing oil layer, oilrecovery coefficient, pressure.

FİZİKA**GEOMETRIC STRUCTURE PARAMETERS
OF TRIPEPTIDE MOLECULE****G.D.ABBASOVA, L.S.HAJIYEVA, G.R.SAFARLI***Baku State University*
abbasova1962@mail.ru

Arginylglycyl aspartic acid, consisting of L-arginine, glycine and L-aspartic acid, is a component of cellular proteins and is a common element of recognition and protein-protein interaction. In cell biology and biotechnology, the free molecule arginine, glycine, aspartic acid is widely used to inhibit intercellular bonds, as it has the ability to specifically bind to integrins and block intercellular bonds.

Key words: Arginylglycyl aspartic acid, spatial structure, conformation, molecular dynamics.

Introduction

The study of the conformational properties of peptide molecules has been a promising object for researchers for several decades. This happened since amino acid sequence in each peptide molecule is determined by its own spatial structure. Conformational changes in a molecule play an important role in the structure and binding of peptide molecules. It is known that the biological properties of peptide molecules are determined by their chemical and spatial structure. Currently, three classes of peptide molecules are known that are involved in the processes of immunoregulation - these are synthetic peptides that stimulate regeneration processes that accelerate wound healing, contribute to the restoration of cellular metabolism in lymphocytes, and inhibit the development of spontaneous tumors. Advances in the theoretical study of the structure and properties of peptide molecules are associated with the availability and accessibility of numerous computer programs based on various approximations of molecular mechanics methods, on empirical and semi-empirical approximations of quantum chemistry methods [1-3]. The results obtained using these methods, in some cases, are not inferior to the data of experimental studies. At the same time, in most cases, they are a necessary supplement for the interpretation of experimental data.

In addition, it should be noted that good performance can be obtained using semi-empirical quantum-chemical calculations in the study of the electronic structure of modified peptides and dipeptides. Such calculations are per-

formed for low-energy conformational states of peptide structures, calculated by the method of theoretical conformational analysis.

In this article, the methods of theoretical modeling using modern computer programs based on the approximation of atom-atom potential functions analyze the influence of molecular dynamics rearrangements on the electronic properties of peptides arginine, glycine, aspartic acid. The simulation included the search for stable conformational states of the peptide by minimizing the total conformational energy, studying molecular dynamics in an aqueous environment, and calculating electronic parameters in low-energy states of the tripeptide. For calculations, the methods and approaches shown in the work were used [3,4].

Calculation method

The spatial structure and conformational properties of Arginylglycyl aspartic acid molecules were investigated by searching for local minima of the total conformational energy according to the previously used technique [5-6]. When calculating energy, non-valent (E_{n-v}) and electrostatic (E_{el}) atomic interactions, hydrogen bonds (E_H) and torsion contributions (E_{tors}), for the description of which semiempirical potential functions were used [7]. The calculations were carried out as part of a rigid valence scheme. The criterion for the selection of stable structures was the minimum values of conformational energy, the contributions of inter-residual interactions, as well as a system of hydrogen bonds stabilizing the low-energy conformational states of the peptide. To model the water environment, the parameterization proposed in the article was used [7]. The hydrogen bond energy was estimated using the Morse potential at a hydrogen bond dissociation energy of 1.5 kcal/mol, corresponding to the NH ... OC bond distance $r = 1.8 \text{ \AA}$ for aqueous solutions. The value of the dielectric constant is taken to be 10. When discussing the calculation results, the generally accepted classification of peptide structures was used. The choice of structural variants when calculating the conformations of individual peptides was carried out based on the known values of dihedral angles (φ and ψ) corresponding to the low-energy regions of the conformational map R , B , L , and P for each mono-peptide. Diagonal angles were counted according to international nomenclature.

Results and discussion

The low-energy conformational states of the Arg-Gly-Asp molecule, corresponding to the minimum values of the total conformational energy and various types of spatial structure, are shown in Table 1.

Table 1

Energy components of stable tripeptide conformations

№	Peptidechainshape	Total energy and its components *, kcal/mol			
		E_{n-v}	E_{el}	E_{tors}	E_{total}
1	Detailed	-6,4	-3,5	1,4	-8,6
2	Semirolledup	-8,6	-4,2	1,3	-11,5
3	Rolledup	-7,1	-3,8	1,5	-9,4

*Note: E_{n-v} is the contribution of the energy of non-valent interactions; E_{el} – contribution of energy of electrostatic interactions; E_{tors} – contribution of the energy of torsion interactions; E_{total} is the total conformational energy.

In order to study the effect of conformational rearrangements on the electronic characteristics of the tripeptide, molecular dynamics was performed under conditions simulating an aqueous environment and its electronic characteristics were analyzed. The generalized results of the study are given in Table.2.

Table 2

The values of charges on atoms of optimized conformations Arg-Gly-Asp peptide

Aminoacid	Atom	Peptidechainshape		
		Detailed	Semirolledup	Rolledup
Arg	N	0.79	0.75	0.74
	C^α	-0.24	-0.26	-0.27
	C^β	0.22	0.18	0.20
	C^γ	-0.36	-0.24	-0.29
	C^σ	-0.06	-0.12	-0.11
	N^σ	-0.17	-0.14	-0.13
	C^ϵ	-0.02	-0.04	-0.05
	C'	-0.09	-0.07	-0.02
Gly	N	-0.05	-0.46	-0.45
	C^α	0.23	0.11	0.10
	C'	0.21	0.28	0.18
Asp	N	-0.39	-0.31	-0.29
	C^α	-0.08	-0.09	-0.12
	C^β	-0.07	-0.08	-0.13
	C^γ	0.34	0.28	0.32
	O	-0.57	-0.51	-0.63
	C'	-0.07	-0.10	-0.02

At this stage of the calculation, it was revealed that the side chains of arginylglycylaspartic acid are oriented to the medium in the lowest-energy spatial structures of the molecule. This means that they take positions that are favorable for intermolecular interactions. This suggests that these residues can participate in the physiological functions of the molecule and should not be replaced when creating artificial analogs of a natural molecule.

The results will be used to model the structure of complex compounds formed upon binding of the Arg-Gly-Asp peptide to integrins.

References

1. Abbasova G.D., Aliyeva I.N., Omarova A.I., Godjajev N.M.// ANA of Sciensnews, 2010, s. XXX, N.5, p.112-120
2. Abbasova G.D., Aliyeva I.N., Omarova A.I.// Journal of Qafqaz University, 2013, vol.1, № 1, c.47-54
3. Zhang Z., Lai Y., Yu L., Ding J. // Biomaterials, 2010, v.31, p.7873-7882
4. Momany F.A., McGuire R. F, Burgess A.W., Scheraga H.A. Energy parameters in polypeptides: geometric parameters, partial atomic charges, nonbonded interaction for naturally occurring amino acid // J. Phys.Chem, 1975, v.79, p.2361-2381
5. Pattillo C., Sari-Sarraf F., Nallamothu R., Moore B.M., Wood G.C., Kiani M.F. // Pharm. Res., 2005, v.22, p.1117
6. Popov E.M. Quantitative approach to conformations of proteins // Int/J/Quant.Chem., 1979, v.16, p. 707-737
7. Popov E.M. Protein structural organization // M.,J.Sciens,1989, 352 p.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ СТРУКТУРЫ ТРИПЕПТИДНОЙ МОЛЕКУЛЫ

Г.Д.АББАСОВА, Л.С.ГАДЖИЕВА, Г.Р.САФАРЛИ

РЕЗЮМЕ

Аргинилглициласпарагиновая кислота состоящий из L-аргинина, глицина и L-аспарагиновой кислоты, входит в состав клеточных белков и является распространённым элементом распознавания и белок-белкового взаимодействия. В клеточной биологии и биотехнологии свободный молекулы аргинин, глицин, аспарагиновой кислоты широко используется для ингибирования межклеточных связей, так как обладает способностью специфически связываться с интегринами и блокировать межклеточные связи.

Ключевые слова: Аргинилглициласпарагиновая кислота, пространственная структура, конформация, молекулярная динамика

TRİPEPTİD MOLEKULUN STRUKTUR PARAMETRLƏRİ

G.C.ABBASOVA, L.S.HACIYEVA, G.R.SƏFƏRLİ

XÜLASƏ

Aarginilqlisilasparaqin turşusu L-arginin, qlisin və L-asparaqin turşusundan ibarət olub, hüceyrələrinin tərkibinə daxildir və zülal-zülal qarşılıqlı təsirinin öyrənilməsində rolu böyükdür. Hüceyrə biologiyasında və biotexnologiyada sərbəst arginin, qlisin, asparaqin turşusu hüceyrlərəarası rabitələrin yaranmasında və eləcə də bu rabitələrin qırılmasında geniş istifadə olunur.

Açar sözlər: Aarginilqlisilasparaqin turşusu, fəza quruluşu, konformasiya, molekulyar dinamika

УДК 539.2/.6

**РАЗРАБОТКА ВАРИАЦИОННОГО МЕТОДА ИЗМЕРЕНИЯ
ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ПОЛЯРНЫХ ЖИДКОСТЕЙ
В ДИАПАЗОНЕ СВЕРХВЫСОКИХ ЧАСТОТ****4. Анализ погрешностей измерения диэлектрических
параметров полярных жидкостей вариационным методом****С.М.УСЕЙНОВА***Бакинский Государственный Университет*
nushana_kasimova@yahoo.com

По литературным данным применение существующих методов исследования диэлектрических свойств полярных жидкостей в диапазоне сверхвысоких частот (СВЧ) весьма ограничено. Поэтому был разработан новый вариационный метод, который позволяет снять все эти ограничения: диэлектрические параметры (ξ' и ξ'') всех полярных жидкостей и их растворов могут быть определены применяя этот метод. На основе теоретических принципов вариационного метода были решены исходные уравнения и разработан графический метод решения и автоматизированная методика расчета ξ' и ξ'' . Данная статья посвящена математическому расчету всех возможных погрешностей при определении ξ' и ξ'' полярных жидкостей данным методом. Следует отметить, что они минимальны (1,5-2%) при сравнении со всеми существующими методами.

Ключевые слова: вариационный метод, диэлектрические параметры, полярные жидкости, теоретический принцип метода, погрешности.

Для построения теории жидких веществ можно опираться на совокупность экспериментальных данных физических исследований макроскопических характеристик, которые неразрывно связаны с молекулярными параметрами и иллюстрируют структуру и движение молекул, связанных с природой и механизмом проявления специфических и универсальных взаимодействий, а также характером ближнего окружения молекул в жидкости.

К числу эффективных методов исследования жидкостей современной физики, занимающихся изучением структурных особенностей и молекулярного движения наряду с такими методами как релеевское рассеивание света, инфракрасная и ЯМР-спектроскопия могут быть причислены

методы диэлектрической радиоскопии.

Диэлектрические методы исследования вещества обосновываются на изучении возникновения диэлектрической поляризации и процессов ее установления во времени под действием внешнего электрического поля. При том, если равновесные (статические) диэлектрические свойства отражают суммарный вклад всех кинетических единиц, составляющих вещество, то динамические диэлектрические свойства наглядно демонстрируют долю каждого из них, обусловленного структурными, фазовыми и конформационными особенностями и агрегатным состоянием вещества.

При применении диэлектрических методов исследований, которые базируются на взаимосвязи между микроскопическими параметрами исследуемой жидкости - временем релаксации (τ), характеризующей скорость реакции молекулярного поля, в соответствии с ее размерами и массой, а также окружающей ее ближней средой, в тепловом движении и макроскопическими диэлектрическими свойствами вещества, полученные данные могут стать основой построения молекулярной модели вещества.

Применение диэлектрических методов к исследованию жидкостей позволяют путем оценки поведения частотных и температурных зависимостей диэлектрической проницаемости (ξ') и диэлектрических потерь (ξ'') определять значение дипольных моментов (μ) полярных молекул, поляризуемости (α), энергии активации дипольной релаксации, характер ориентации диполей и ряд других важных характеристик вещества, времени релаксации (τ), вернее распределение времени релаксации, вблизи наиболее вероятного его значения, которая также сильно меняется с температурой, может быть определена либо из частотных, либо из температурной зависимости диэлектрических коэффициентов. Но для достоверности представлений о молекулярной структуре и характере взаимодействий в веществе пользуются совокупностью данных обеих зависимостей, снятых в достаточно широких пределах частоты внешнего электрического поля и температуры (14-17).

К настоящему времени накоплен достаточно обширный экспериментальный материал (5,8,9,10) и диэлектрических свойствах и релаксационных характеристиках целого ряда чистых жидкостей, к которым легко применима молекулярная модель Дебая. Но объекты в которых преобладает тип межмолекулярного взаимодействия в исходных компонентах (бинарные и другие системы растворов полярных жидкостей), полярные жидкости и растворы, обладающие заметными диэлектрическими потерями изучены сравнительно мало и истолкование степени влияния на общую релаксационную характеристику отдельных кинетических единиц и сил межмолекулярного взаимодействия по сравнению с чистыми жидкостями довольно ограничена. Именно эти особенности стали причиной возникающих технических трудностей и не позволяют применять извест-

ные методы диэлектрических параметров, основанных на анализе экспериментально снимаемой зависимости коэффициента стоячей волны (КСВ~η) от толщины исследуемой жидкости в измерительной ячейке. Указанное обстоятельство привело к необходимости разработке нового, удобного "вариационного метода", допускающего измерение диэлектрических параметров полярных жидкостей и растворов, обладающих высоким диэлектрическими потерями в диапазоне сверхвысоких частот (СВЧ).

Для оценки погрешности измерения диэлектрических параметров жидкости, разработанным вариационным методом, уравнения (4.1) и (4.2):

$$\xi_1 = \frac{1-y^2}{u^2}; \quad (4.1)$$

$$\xi_2 = \frac{2y}{u^2}; \quad (4.2)$$

проведя следующие преобразования,

$$\xi_1 = \frac{\xi' - P}{1 - P}; \quad \xi_2 = \frac{\xi''}{1 - P};$$

где $u = \frac{\lambda_g}{\lambda_b}$; $y = tg \frac{\Delta}{2}$; $\Delta = \arctg \frac{\xi_2}{\xi_1}$;

$$P = \left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^2;$$

далее

$$\xi' = \left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{\lambda_g}\right)^2 (1 - tg^2 \Delta / 2);$$

$$\xi'' = \left(\frac{\lambda}{\lambda_g}\right)^2 tg \frac{\Delta}{2};$$

где, ξ' – диэлектрическая проницаемость, ξ'' – диэлектрические потери исследуемой жидкости; λ – длина электромагнитной волны в свободном пространстве при отсутствии среды; λ_0 – критическая длина волны, определяемая размерами волновода ($\lambda_0 = 2a$, a – внутренняя ширина волновода), λ_g – длина электромагнитной волны в волноводе; $\lambda_b = \frac{\lambda}{1-P}$ – длина электромагнитной волны в пустом волноводе, где, $P = \left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^2$; [в случае распространения волн типа ТЕМ $\lambda_0 \rightarrow \infty$ и $P=0$]. Продолжая преобразования, в итоге, уравнения (4.1) и (4.2) представим в виде:

$$\xi' = \left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{\lambda_b}\right)^2 \cdot \frac{x^2 (1-y^2)}{v^2}; \quad (4.3)$$

$$\xi'' = \left(\frac{\lambda}{\lambda_b}\right)^2 \cdot \frac{2x^2 y}{v^2}; \quad (4.4)$$

здесь $x = l_m / \lambda_b$, l_m – толщина слоя жидкости, при которой имеет место минимум или максимум амплитуды отраженной волны.

Так как λ , λ_0 , λ_b измеряется с высокой точностью, то при условии $\xi' \gg \frac{\lambda^2}{\lambda_0}$ относительные отклонения величин ξ' , ξ'' по уравнениям (4.3) и (4.4) при измерении параметров x, y, v , определяется следующими двумя выражениями:

$$-\frac{\Delta \xi'}{\xi'} = 2 \frac{\Delta v}{v} + \frac{\Delta x}{x} + 2a \frac{\Delta y}{y} ; \quad (4.5)$$

$$-\frac{\Delta \xi''}{\xi''} = 2 \frac{\Delta v}{v} - \frac{\Delta x}{x} - 2a \frac{\Delta y}{y} ; \quad (4.6)$$

где $a = \frac{y^2}{1-y^2}$;

Экспериментально измеренными величинами в рассматриваемом вариационном методе являются коэффициент стоячей волны η_m в точке минимума зависимости η от l и $v = l_m / \lambda_b$, где l_m – измеряемая толщина жидкости в ячейке, при которой отражение волны минимально. Как следует из номограммы (рис. 1) (15,16) зависимости v от x для первого минимума функции η от l , рассчитанные по уравнению (4.8) в широком интервале варьируемого параметра y , мало отличается друг от друга и близки в продольной зависимости v от x при $y=0$.

Известно, что в точке экстремума функции η или δ от l ,

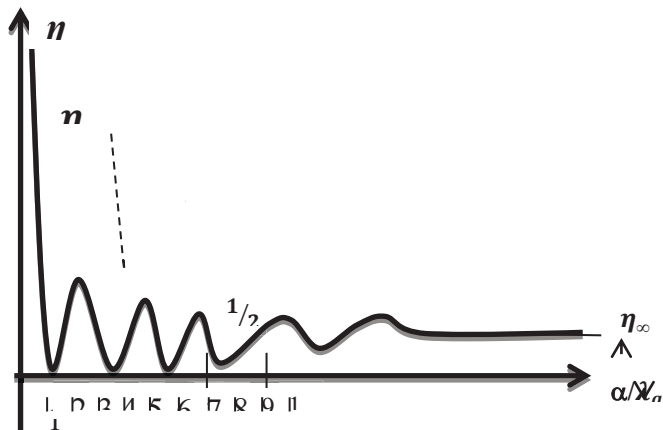


Рис. 1. Зависимость коэффициента стоячей волны η в волноводе от толщины отражающего слоя l исследуемой жидкости при наличии в ней диэлектрических потерь

$$u = (1+y^2) R^{-\frac{1}{2}} ; \quad (4.7)$$

$$v = x(1 + y^2)R^{-\frac{1}{2}} ; \quad (4.8)$$

где

$$v = \frac{l_m}{\lambda_b};$$

тогда

$$R = 1 - y^2 - 2y \frac{1 - ch(4\pi xy) \cos(4\pi x)}{sh(4\pi xy) \sin(4\pi x)} ; \quad (4.9)$$

рассчитанные по уравнению (4.8) в широком интервале варьируемого параметра y .

С учетом этого обстоятельства, разложим функцию (4.8) в ряд по y и ограничимся лишь первым членом этого ряда. Получим, что

$$v = \frac{x}{\sqrt{1-A}} ; \quad (4.10)$$

где $A = \frac{tg \alpha}{\alpha}$; $\alpha = 2\pi x$;

так как $\Delta v \cong \frac{\delta v}{\delta x} \Delta x$; $\Delta \eta_m = \frac{\delta \eta_m}{\delta x} \Delta x + \frac{\delta \eta_m}{\delta y} \Delta y$; (4.11)

то, подставляя (4.11) в (4.5) и (4.6) имеем

$$-\frac{\Delta \xi'}{\xi'} = 2 \frac{\Delta v}{v} (B_1 - aB_2) + 2 \frac{\Delta \eta}{\eta_m} aB_3; \quad (4.12)$$

$$-\frac{\Delta \xi'}{\xi'} = 2 \frac{\Delta v}{v} (B_1 + B_2) + \frac{\Delta \eta}{\eta_m} B_3; \quad (4.13)$$

где

$$B_1 = 1 - \frac{v}{x - \frac{\delta v}{\delta x}}; \quad B_2 = \frac{v \frac{\delta \eta_m}{\delta x}}{y \frac{\delta \eta_m}{\delta y} \frac{\delta v}{\delta x}}; \quad B_3 = \frac{\eta_m}{y \frac{\delta \eta_m}{\delta y}};$$

После преобразования уравнений (4.7) и (4.8), следует, что экстремальные значения коэффициента стоячей волны в волноводе η_m при толщине слоя жидкости в волноводной секции равной l_m описывается двумя уравнениями:

$$\eta_m = \sqrt{\frac{cth(2\pi xy) + yctg(2\pi xy)}{th((2\pi xy) + ytg(2\pi x))}} ; \quad (4.14)$$

$$\eta_m = \sqrt{\frac{th(2\pi xy) - ytg(2\pi xy)}{cth(2\pi xy) + yctg(2\pi x)}}; \quad (4.15)$$

При $\eta_m = 1$ оба уравнения приводятся к выражению вида

$$sh(\pi xy) = -y \sin \pi c; \quad (4.16)$$

которое описывает в плоскости координат x, y функцию, определяющую границы применимости уравнений (4.14), (4.15). Уравнение 4.15 оказывается справедливым для значений x и y , где $x > x_1$ и $y < y_1$ определяются из граничного условия (4.16).

С учетом производных функций (4.14), (4.15), (4.16) получим:

$$B_1 = \frac{A \cos^2 \alpha_1}{1 + (2 - 3A) \cos^2 \alpha_1};$$

$$B_2 = \frac{2}{A} \frac{1 - A}{1 + (2 - 3A) \cos^2 \alpha_1} \frac{\sin 2\alpha_1 (yk_1 + k_2) + sh 2\alpha_1 y(k_1 - yk_2)}{2\alpha_1 yk_1 + 2k_2\alpha_1 - sh 2\alpha_1 yk_3};$$

$$B_3 = \frac{sh 2\alpha_1}{y} \frac{2yk_1 + (1 - y^2)k_2}{2\alpha_1 yk_1 + 2\alpha_1 k_2 - sh 2\alpha_1 yk_3};$$

где:

$$k_1 = tg^2 \alpha_1 y - tg^2 \alpha_1;$$

$$k_2 = 2tg^2 \alpha_1 y - tg^2 \alpha_1;$$

$$k_3 = tg^2 \alpha_1 y + tg^2 \alpha_1;$$

Для упрощения (4.12) и (4.13) примем, что l_m достаточно близка по величине к $1/4$.

$$B_2 = -B_3 = -2b;$$

$$b = \left[1 + \frac{\pi y}{sh(\pi y)} \right]^{-1};$$

подставляем (4.14) в (4.12) и (4.13) и учитывая, что $\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta l_m}{l_m}$, получим выражение для случайной относительной ошибки в определении ξ' и ξ'' :

$$\frac{\Delta \xi'}{\xi'} = 2 \frac{\Delta l_m}{l} (1 + 2ab) + \frac{\Delta \eta}{\eta} 4ab; \quad (4.17)$$

$$\frac{\Delta \xi''}{\xi''} = 2 \frac{\Delta l_m}{l_m} (1 - 2b) + \frac{\Delta \eta}{\eta} 2b; \quad (4.18)$$

При малых потерях $y=0$, значение a, b близки к единице. Поэтому для этого случая выражения (4.15) и (4.16) сводятся к следующим соот-

НОШЕНИЯМ:

$$\frac{\Delta\xi'}{\xi'} = 2 \frac{\Delta l_m}{l} ; \quad (4.19)$$

$$\frac{\Delta\xi''}{\xi''} \cong -2 \frac{\Delta l_m}{l_m} + 2 \frac{\Delta\eta}{\eta} ; \quad (4.20)$$

Из уравнений (4.15) и (4.16) следует, что погрешность в ξ' определяется ошибкой в измерении лишь l_m . Для полярных жидкостей со значением $\xi'=10\div 20$ измеряемых в диапазоне $\lambda=3,21$ см, величина l_m лежит в пределах 2,5-1,0мм. Так как абсолютная ошибка в измерении длины стандартными микрометрами составляет 0,01мм, то результирующая относительная погрешность в определении ξ' будет лежать в пределах 1-2%, в зависимости от типа измеряемой жидкости. Для слабополярных жидкостей ошибка в определении ξ' достигает менее 0,5%. Ошибка в определении ξ'' определяемая погрешностью в измерении l_m в 2 раза выше, чем у ξ' . Из-за погрешности измерения КСВ, достигающей 3-5%, результирующая ошибка в измерении ξ'' может достигать 5%, хотя в случае слабополярных жидкостей она может опускаться до 1-2%, из-за уменьшения относительной ошибки в измерении l_m и повышении точности отсчета больших значений КСВ.

Для случая жидкостей со значительными диэлектрическими потерями, ошибка в определении ξ' и ξ'' возрастает. Для ее оценки рассмотрим крайний случай $y=0, \%$, соответствующему максимально возможной величине $tg\delta=1,2$. Тогда:

$$\frac{\Delta\xi'}{\xi'} = 3 \frac{\Delta l_m}{l} + \frac{\Delta\eta}{\eta} ; \quad (4.21)$$

$$\frac{\Delta\xi''}{\xi''} \cong 0,4 \frac{\Delta l_m}{l_m} + 1,2 \frac{\Delta\eta}{\eta} ; \quad (4.22)$$

При указанных выше погрешностях измерения l_m и η_m результирующая ошибка в определении ξ' и ξ'' для случая сильнополярных жидкостей со значениями $\xi'=10\pm 20$ составляет соответственно 5% и 7%. Для слабополярных жидкостей со значениями $\xi'=2-4$, результирующая ошибка уменьшается и составляет соответственно 2% и 4%.

В таблице 1 приведены результаты измерений ξ' и ξ'' некоторых полярных жидкостей, выполненных указанным методом при длине волны $\lambda=3,21$ см и температуре $t=20^{\circ}\text{C}$. Там же приведены значения ξ' и ξ'' тех жидкостей, которые получены методом переменных толщин (1,2). Как следует из таблицы, между величинами ξ' , полученными этими двумя методами имеется хорошее согласие, тогда как значение ξ'' определяемых по нашему методу сказывается несколько ниже по величине ξ'' , полученных по методу (1,2).

Таблица 1

Результаты измерений диэлектрической проницаемости ξ' и диэлектрических потерь ξ'' некоторых полярных жидкостей при длине волны $\lambda = 3,21$ см и $t=20^{\circ}\text{C}$.

№	Вещество	Длина волны λ (в см)	Методом Поли-Малова (2)		Предлагаемым вариационным методом	
			ξ'	ξ''	ξ'	ξ''
1	Ацетон	3,21	20,8	3,56	20,6	3,50
2	Ацетон	0,71	12,3	9,65	12,4	9,38
3	Циклопентанон	3,21	12,4	3,75	11,8	3,73
4	Циклопентанон	0,71	4,68	4,90	4,70	4,76

Расчет ξ'' по (2,6,11,12) проводится с использованием данных о максимальных КСВ соответствующих толщинам жидкости в ячейке приблизительно кратным $\lambda_g/2$. При этих толщинах жидкости в ячейке очень существенен учет систематической ошибки в определении КСВ, вызываемых паразитными отражениями от слюдяной прокладки и не идеальностью короткозамкнутого поршня в ячейке. В предлагаемом методе КСВ измеряется при толщине жидкости в ячейке близкой к $\lambda_g/4$. Этим самым значительно снижаются систематические ошибки в определении КСВ, вызываемые указанными выше причинами. Наблюдаемые в таблице 1 расхождения в ξ'' , по всей видимости, вызваны не учетом систематических ошибок в определении КСВ в методе (1,2).

В практике высокочастотных измерений диэлектрических параметров полярных жидкостей и растворов часто используются методы, основанные на измерении отражения электромагнитной волны от короткозамкнутой на конце волноводной или коаксиальной ячейки с исследуемой жидкостью, при условии, что толщина в ячейке регулируема (1-9). Обладая сравнительно высокой точностью измерения, возможностью учета систематических ошибок и рядом других достоинств эти методы, однако весьма трудоемки и требуют нахождения всей экспериментальной зависимости модуля коэффициента отражения электромагнитной волны (ρ) или коэффициента стоячей волны (η) от толщины слоя жидкости в ячейке l , что технически не всегда возможно, в особенности в диапазоне сверхвысоких частот (СВЧ) – сантиметровые и миллиметровые волны. Кроме того, методы переменной толщины имеют ограниченную сферу применения; они удобны лишь для измерения диэлектрических параметров жидкостей, обладающих в диапазоне сверхвысоких частот средними и малыми потерями. При заметных диэлектрических потерях в жидкости зависимость (ρ) или η от l имеет лишь один экстремум (максимум или минимум) в своем ходе, что естественно, исключает возможность применения метода переменных толщин (1,2,4), базирующего на измерении расстояния между минимумами зависимости (ρ) или η от l и отношения (ρ) или η в точках максимума этой зависимости. Как показано в (9), из-за больших систематических ошибок указанные методы (1,2,4) неприемле-

мы также и для измерения диэлектрических параметров слабополярных жидкостей, обладающих в диапазоне сверхвысоких частот малыми потерями.

Разработанный новый вариационный метод измерения диэлектрической проницаемости ξ' и диэлектрических потерь ξ'' полярных жидкостей свободен от перечисленных выше недостатков. Он основан на измерении толщины слоя жидкости в ячейке, при котором имеет место минимум амплитуды отраженной волны (ρ) или коэффициента стоячей волны η , и величины η_m при этой толщине жидкости. Вариант подобного метода рассматривался в (13); однако, введенное в (13) предположение об активной величине исходного сопротивления волноводной секции с жидкостью при толщине слоя, соответствующему минимуму величины (ρ) или η , обосновано лишь для случая полярных жидкостей, обладающих малыми диэлектрическими потерями.

Таким образом, полярные жидкости - циклопентанол, циклопентанон и их концентрированные растворы в друг друге, циклопентане и ацетоне исследовались впервые, и как показали результаты вариационный метод нашел себе достойное применение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шахпаронов М.И. Методы исследования теплового движения молекул и строение жидкостей. М. 1972. с.281.
2. Poley I.P. J.Appl. Sci.Res. B4, 337, 1955.
3. Ахадов Я.Ю. Диэлектрические свойства чистых жидкостей, Изд.стандартов, М., 1972. с.412.
4. Брандт А.А. Исследование диэлектриков на сверхвысоких частотах. М., Физматгиз, 1963. с.493.
5. Касимов Р.М., Нагизаде Н.С. Вестник МГУ, серия химическая, 2, 101, 1967.
6. Fatuzzo E, Mason P.R. J.of. Appl. Rh., 36,2, 427, 1965.
7. Харвей А.Ф. Техника сверхвысоких частот, т. I, Изд. "Сов.радио", 1965.с. 783.
8. Касимов Р.М. Измерительная техника. 10, 1970.
9. Касимов Р.М., Усейнова С.М. Изд. АН Азерб. ССР, серия физико-техн. и матем. наук, I, 1973, с.111-117
10. Касимов Р.М., Усейнова С.М. Измерительная техника, 2, 1975, с.76-82
11. Sarojini V. Sci. Industr. Res.,19B,52,91,115,1960
12. Sarojini V. Frans Faradey Soc., 58, 1729, 1962
13. Fartuzzo E., Mason P.R. Journal of Appl. Rh. 36,2,427,1965
14. Усейнова С.М. О вариационном методе исследования диэлектрических свойств жидкостей и растворов. BDU., "Fizikanın müasir problemləri" V Respublika konfransının materialları. Bakı: 2011, s.200-202.
15. Усейнова С.М. Графические способы применения вариационного метода. BDU., "Fizikanın müasir problemləri" V Respublika konfransının materialları. Bakı: 2011, s.202-205.
16. Усейнова С.М. Разработка вариационного метода измерения диэлектрических параметров полярных жидкостей в диапазоне сверхвысоких частот.1.Теоретические принципы вариационного метода измерения. Баку, Вестник БГУ, серия физ-мат. наук, 2015, №1, с.176-185
17. Усейнова С.М. Разработка вариационного метода измерения диэлектрических параметров полярных жидкостей в диапазоне сверхвысоких частот.2.Графический метод решения исходных уравнений. Баку, Вестник БГУ, серия физ-мат. наук, 2016, №1, с.177-188

MAYELƏRİN DİELEKTRİK XARAKTERİSTİKALARININ İFRAT YÜKSƏK TEZLİKLƏR DİAPAZONUNDA VARIASİON ÖLÇMƏ METODUNUN NƏZƏRİ PRİNSİPLƏRİ

4. Polyar mayelərin dielektrik parametrlərinin variasion metodla təyinində mümkün olan xətalərin analizi

S.M.USEYNOVA

XÜLASƏ

Ədəbi mənbələrdən məlumdur ki, ifrat yüksək tezliklər (İYT) diapazonunda polyar mayelərin dielektrik xassələrinin məlum olan metodlarla tədqiqi xeyli məhduddur. Məhz bu səbədən yeni variasion metod işlənib hazırlanmışdır ki, bu metodun tətbiqi bütün polyar mayelərin və məhlulların dielektrik parametrlərini (dielektrik nüfuzluğu ξ' və dielektrik itkiləri ξ''), onların qiymətindən asılı olmayaraq, təyin etməyə imkan verir. Variasion metodun nəzəri prinsipləri əsasında riyazi tənliklərin hesablanmış və tənliklərin həllinin qrafik metodu işlənib hazırlanmış, ξ' və ξ'' qiymətlərinin hesablanması avtomatlaşdırılmış metod ilə həyata keçirilmişdir.

Məqalə variasion metodla bütün polyar mayelərin dielektrik parametrlərinin (ξ' və ξ'') təyini zamanı mümkün ola biləcək bütün xətalərinin riyazi əsaslarla hesablanmasına həsr olunmuşdur. Qeyd etmək lazımdır ki, bu xətalərin qiyməti (1,5-2%) digər müvcud metodların tətbiqi zamanı buraxılan xətalərdən xeyli kiçikdir.

Açar sözlər: variasion tədqiqat metodu, dielektrik parametrlər, polyar mayelər, metodun teoretik əsasları, xətalər

DEVELOPMENT OF VARIATIONAL METHOD FOR MEASURING OF DIELECTRIC PARAMETERS OF POLAR LIQUIDS AT MICROWAVE FREQUENCIES

4. Analysis of errors in measuring of the dielectric parameters of polar liquids by the variation method

S.M.USEYNOVA

SUMMARY

Use of existing methods for studying the dielectric properties of polar liquids in the ultra-high frequency range is very limited according to the references. So, a new variational method was developed and allows one to remove of all these restrictions: the dielectric parameters (ξ' and ξ'') of all polar liquids and their solutions can be determined by using this method. The original equations were solved on the basis of the theoretical principles of the variational method and graphical solution method and an automated method for calculating of ξ' and ξ'' were developed.

Mathematical calculation of all possible errors in the determination of polar liquids by this method have been shown in these paper. It should be noted that these errors are minimal (1.5-2%) under compared with all existing methods.

Key words: variational method, dielectric parameters, polar liquids, theoretical principle of methods, errors.

UOT 532

PACS: 77.22.Ej, 64.75 Bc, 31.70. Dk, 61.70 Og

**AQAROZANIN SUDA MƏHLULLARININ
ÖZLÜ AXININ AKTİVLƏŞMƏ PARAMETRLƏRİNİN
TEMPERATURDAN ASILILIĞI****A.H.ƏSƏDOVA***Bakı Dövlət Universiteti**aynuramrahova@gmail.com*

İşdə aqarozanın ($M=120000q/mol$) sulu məhlullarının $288\div 323$ K temperatur və $0.01\%-0.09\%$ konsentrasiya intervalında dinamik özlülüüyü və sıxlığı ölçülmüşdür. Təcrübi nəticələrdən istifadə edərək verilən temperatur intervalında verilmiş konsentrasiyalar üçün özlü axının aktivləşmə parametrləri (ΔG_{η} , ΔH_{η} , ΔS_{η}) hesablanmışdır. Alınan nəticələr göstərir ki, özlü axının aktivləşmə parametrləri temperaturdan asılı olub məhlulun strukturuna çox həssasdırlar.

Açar sözlər: aqaroza, özlü axının aktivləşmə parametrləri

Məlumdur ki, yüksək molekullu birləşmələrin məhlulları, xüsusən də sulu məhlulları praktikada tətbiqi nöqtəyi-nəzərdən böyük əhəmiyyət kəsb edir. Məhlulların tətbiqi onların xassələri ilə, xassələri isə öz növbəsində məhlulun bütün komponentlərinin bir-biriləri ilə qarşılıqlı təsirləri nəticəsində formalaşan strukturu ilə sıx əlaqədardır. Müxtəlif xarici təsirlər nəticəsində (temperatur, təzyiq, əlavələr və.s) məhlulun strukturunda (eyni zamanda xassəsində) baş verən dəyişikliklər onu xarakterizə edən fiziki-kimyəvi parametrlərin qiymətlərində özünü biruzə verir [1; 2]. Bu kəmiyyətlərin ən vacibləri sırasında məhlulun reoloji xassələrini xarakterizə edən özlü axının aktivləşmə parametrləridir. Özlü axının aktivləşmə parametrləri özlü axının aktivləşmə entalpiyası, aktivləşmə entropiyası və aktivləşmə sərbəst Gibbs enerjisi məhlulun özlülüüyünün və sıxlığının temperaturdan asılılıqlarının təcrübədə təyin edilməsi əsasında hesablanmasıdır. Məhlulun dinamik özlülüüyü Ubellohde kapilyar viskozimetri [3], sıxlıq piknometr vasitəsi ilə ölçülmüşdür [4]. Tədqiqat obyektini olaraq aqaroza (CONDA firması $M=120000q/mol$) seçilmişdir, məhlullar bidistillə olunmuş suda hazırlanmışdır. Eyrinq [5] nəzəriyyəsinə görə özlü axının aktivləşmə Gibbs enerjisi aşağıdakı ifadə ilə təyin olunur:

$$\Delta G_{\eta} = RT \ln \frac{\eta}{\eta_0} \quad (1)$$

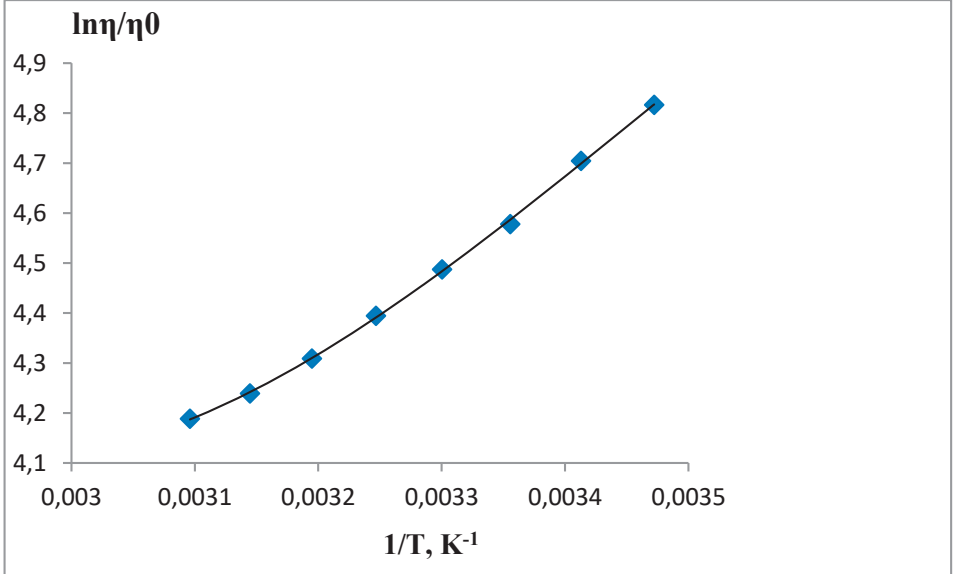
Burada, $\eta_0 = \frac{N_A h \rho}{M}$, R-universal qaz sabiti, N_A -Avaqadro sabiti, h- Plank sabiti, M-polimerin molekulyar kütləsidir. Özlü axının aktivləşmə entalpiyası (H_{η})

$$\Delta H_{\eta} = R \frac{\partial \ln(\frac{\eta}{\eta_0})}{\partial (\frac{1}{T})} \quad (2)$$

Özlü axının aktivləşmə entropiyası isə,

$$\Delta G_{\eta} = \Delta H_{\eta} - T \Delta S_{\eta} \quad (3)$$

Məlum termodinamik asılılığından istifadə edərək hesablanmışdır. Şəkil 1-də aqarozanın 0.05%-li sulu məhlulunun özlülüyünün temperaturun tərs qiymətindən asılılığı göstərilmişdir. Şəkildən görüldüyü kimi $(\ln \frac{\eta}{\eta_0} - \frac{1}{T})$ asılılığı əyri xətti xarakter daşıyır və bu xəttin bucaq əmsalı nöqtədən-nöqtəyə dəyişir.



Şəkil 1. Aqarozanın 0.05%-li sulu məhlulunun özlülüyünün temperaturun tərs qiymətindən asılılığı

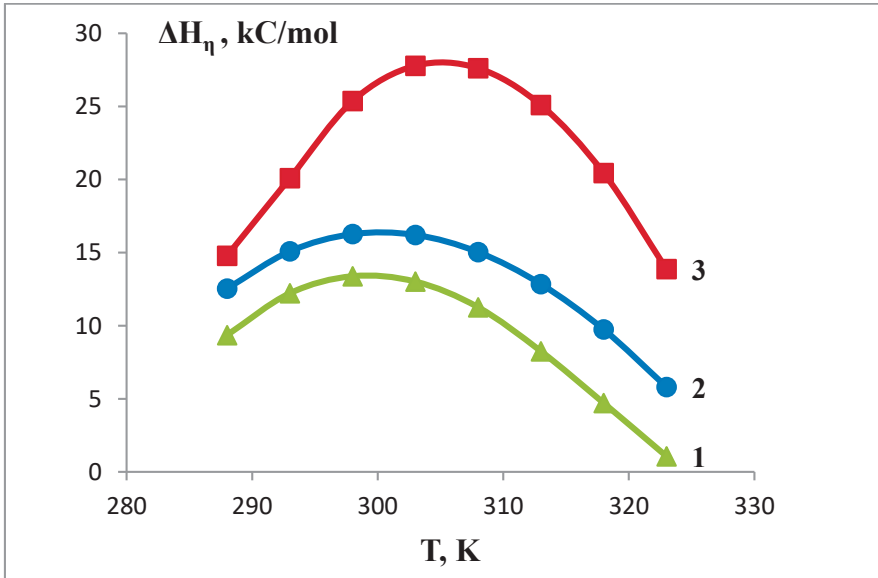
Bu asılılığın düzxətli olmaması struktursuz mayelər üçün verilmiş Frenkel-Eyrinq nəzəriyyəsinə tabe olmaması onu göstərir ki, aqarozanın sulu məhlullarında güclü müxtəlif xarakterli qarşılıqlı təsirlər (H-rabitəsi, ion-dipol və.s) mövcuddur. Aktivləşmə entalpiyası $(\ln \frac{\eta}{\eta_0} - \frac{1}{T})$ asılılığının hər bir nöqtəsinə çəkilən toxunanın bucaq əmsalı vasitəsilə təyin edilmişdir. Kompüter vasitəsi ilə asanlıqla tapmaq olar ki, bu təcrübi nöqtələrdən keçən əyriyə uyğun olan funksiya

$$\ln \frac{\eta}{\eta_0} = a_0 + a_1 \left(\frac{1}{T}\right) + a_2 \left(\frac{1}{T}\right)^2 + a_3 \left(\frac{1}{T}\right)^3 \quad (4)$$

kimidir [6]. Burada a_0 , a_1 , a_2 və a_3 temperaturdan asılı olmayan kəmiyyətlər olub riyazi optimallaşma üsulu ilə təyin olunur. (4)-ü (2)-də nəzərə alsaq ΔH üçün

$$\Delta H_{\eta} = R(a_1 + 2a_2 \left(\frac{1}{T}\right) + 3a_3 \left(\frac{1}{T}\right)^2) \quad (5)$$

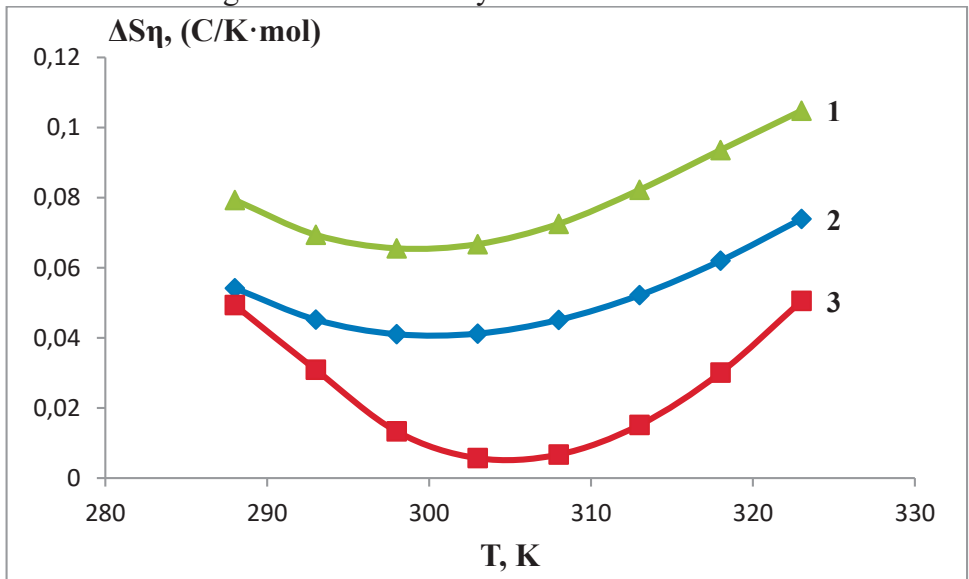
ifadəsini alırıq. Beləliklə, (1) ifadəsinə görə ΔG_{η} , (5) ifadəsinə görə ΔH_{η} hesablanmışdır. ΔG_{η} və ΔH_{η} məlum olduqdan sonra isə (3) ifadəsinə əsasən özlü axının aktivləşmə entropiyası (ΔS_{η}) təyin edilmişdir. Alınan nəticələr göstərir ki, özlü axının aktivləşmə entropiyası və aktivləşmə entalpiyası temperaturdan asılıdır (şəkil 2; 3). Şəkil 2-də aqarozanın müxtəlif konsentrasiyaları üçün özlü axının aktivləşmə enerjilərinin temperaturdan asılılıqları verilmişdir. Məlum olduğu kimi özlü axının aktivləşmə parametrləri məhlulun strukturuna çox həssasdırlar: aktivləşmə entalpiyası məhlulun daxilindəki qarşılıqlı təsirlərlə müəyyən olunan möhkəmliyini, aktivləşmə entropiyası isə məhlulun nizamlılığını xarakterizə edir.



Şək. 2. Aqarozanın müxtəlif konsentrasiyaları üçün özlü axının aktivləşmə entalpiyasının temperaturdan asılılığı.
1.0.05%-li, 2.0.07%-li, 3.0.09%-li aqarozanın sulu məhlulu

Şəkil 2-dən görüldüyü kimi özlü axının aktivləşmə entalpiyasının temperatur asılılığında ΔH_{η} kiçik temperaturlarda müəyyən enli maksimuma qədər artır sonra isə azalır. Alınan nəticəni başa düşmək üçün qeyd edək ki, təmiz mayelərdən fərqli olaraq məhlulun möhləmliyinə və uyğun olaraq özlülüyünə iki faktor təsir edir: birinci amil odur ki, temperaturun artması ilə istilik hərəkətinin intensivliyi artır və mövcud zəif rabitələr qırılır, məhlulun möhkəmliyi azalır və ΔH_{η} azalır, ikinci faktor isə odur ki, temperaturun artması ilə həlledicinin polimerə hərisliyini, termodinamik keyfiyyətini xarakterizə edən

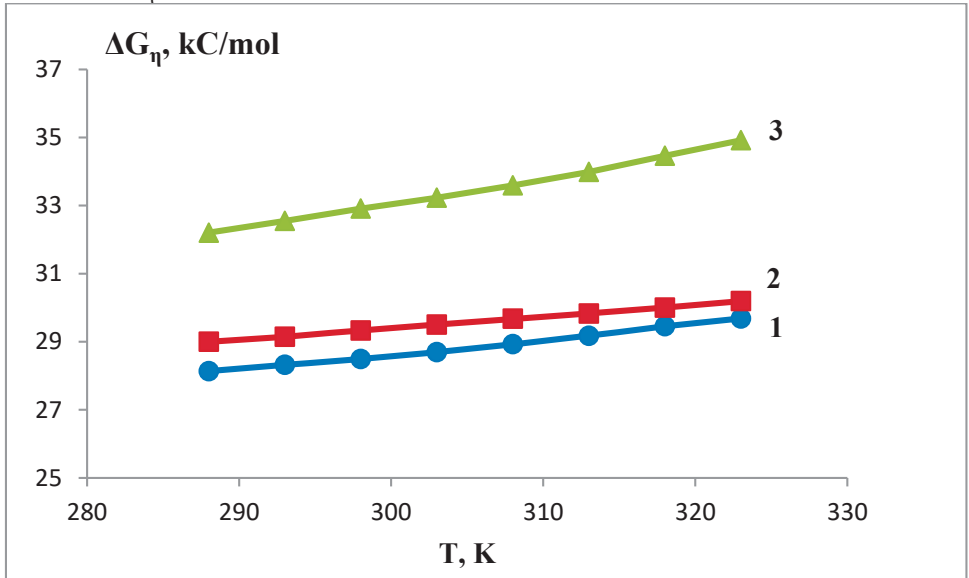
ikinci virial əmsal (A_2) dəyişir və məhlulun strukturuna öz təsirini göstərir. Lakin müxtəlif sistemlərdə ikinci virial əmsal temperaturdan asılı olaraq müxtəlif cür dəyişir. Aqarozanın duru sulu məhlullarının xarakteristik özlülüyünün və $\frac{\eta_{gətirilmiş}}{c} - C$ asılılığından təyin olunan Haqqins sabitinin temperaturdan asılılığı göstərir ki, [7] temperatur artdıqca $[\eta]$ artır, uyğun olaraq k' -azalır. Bu kəmiyyətin temperatur asılılıqları ikinci virial əmsalın temperatur artdıqca artdığını göstərir, yəni həlledicinin termodinamik keyfiyyəti yaxşılaşır. Bu isə temperatur artdıqca suyun məhlulda mövcud olan statistik yumağa nüfuz etməsinin asanlaşması deməkdir. Su yumağa daxil olaraq makromolekulun seqmentləri ilə müəyyən rabitələr yaradaraq məhlulun möhkəmliyini artırır və ΔH_{η} -in qiyməti artır. Lakin bu nisbətən kiçik temperaturlarda temperaturun strukturu dağıtma effektivə üstün gələ bilər. Ola bilsin ki, ΔH_{η} -T asılılığında T artdıqca suyun polimerə hərisliyinin artması nəticəsində onun strukturlaşdırıcı effekti, T-nin nisbətən kiçik qiymətlərində onun artması nəticəsində məhlulun dağıdıcı təsirini üstələyir.



Şəkil 3. Aqarozanın müxtəlif konsentrasiyaları üçün özlü axının aktivləşmə entropiyasının temperaturdan asılılığı. 1.0.05%-li, 2.0.07%-li, 3.0.09%-li aqarozanın sulu məhlulu

Lakin temperaturun müəyyən qiymətindən sonrakı qiymətlərində onun dağıdıcı təsiri üstünlük təşkil edir və temperatur artdıqca ΔH_{η} -in qiyməti azalmağa başlayır. Özlü axının aktivləşmə entropiyasının temperaturdan asılılığı yuxarıdakı mülahizələrlə uzlaşır. Doğrudan da suyun yumağa daxil olaraq polimerin seqmentləri ilə müəyyən müxtəlif rabitələrin yaranması nəticəsində kiçik temperaturlarda məhlulda nizamlılıq artır (ΔS_{η} azalır), sonra isə istilik hərəkətinin intensivlənməsi nəticəsində rabitələr qırılır bu seqmentlər sərbəst-

lənir, müəyyən makroskopik hala uyğun makroskopik halların yaranması imkanları artır və ΔS_{η} -artmağa başlayır (şəkil 3).



Şəkil 4. Aqarozanın müxtəlif konsentrasiyaları üçün özlü axının aktivləşmə Gibbs enerjisinin temperaturdan asılılığı. 1.0.05%-li, 2.0.07%-li, 3.0.09%-li aqarozanın sulu məhlulu

Özlü axının aktivləşmə sərbəst Gibbs enerjisi isə molekulların hər hansı halında rabitələrin qırılması üçün əldə etdikləri əlavə enerjinin rabitə enerjisindən artıq qalan və iş görərk digər hala keçməsinə sərf olunan sərbəst enerjinin temperatur asılılığı isə şəkil 4-də göstərilmişdir.

ƏDƏBİYYAT

1. Дакар Г.М., Кораблева Е.Ю., //т.72, N4, с.662, 1998
2. Масимов Э.А, Гасанов Г.Ш., Пашаев Б.Г.,// Журнал физ.химии, 2017, т.91, N4, с.644
3. Felipe de Oliveira Baldner 1, Fabiana Rodrigues Leta2, Claudio Roberto da Costa Rodrigues 3, Alex Pablo Ferreira Barbosa 4, Arthur Tortelote dos Santos 5, Dalni Malta do Espirito Santo Filho6, Pedro Bastos Costa7// Measurement of dimensional parameters IN ubbelohde type viscometers using digital images/ Conference Paper · November 2011
- 4.Масимов Э.А, Пашаев Б.Г., Гасанов Г.Ш.// Журнал физ.химии, 2013, т.87, N6, с.969
- 5.Глесстон С., Лейдлер К., Эйринг Г. Теория абсолютных скоростей. М.: Изд-во иностр.лит., 1948. 600 с.
6. Мəsimov Е.Ə., Нəсənov А.Ə., Нəсənov Х.Т. //Suyun strukturu və onun struktur temperaturunun tədqiqi//s.78, Bakı, 2018
7. Holman J.P. Heat Transfer, McGraw-Hill, 2002 ISBN 0071226214 Frank P. Incropera, David P. DeWitt, Fundamentals of Heat and Mass Transfer, Wiley, N 2007, 0471457280

ТЕМПЕРАТУРНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ АКТИВАЦИОННЫХ ПАРАМЕТРОВ ДЛЯ ВЯЗКОГО ТЕЧЕНИЯ ВИДНЫХ РАСТВОРОВ АГАРОЗЫ

А.Г.АСАДОВА

РЕЗЮМЕ

Изучены концентрационные (в интервале 0,01÷0,09%) и температурные (288÷323К) зависимости динамической вязкости и плотности водных растворов (M=120000 г/моль). С использованием экспериментальных данных были вычислены значения активационных параметров (свободной энергии, энтропии и энтальпии) для вязкого течения в заданном интервале температуры и концентрации. Получение данных показывают, что растворы очень чувствительны к изменению этих параметров.

Ключевые слова: агароза, активационные параметры

THE DEPENDENCE OF ACTIVATION PARAMETERS ON TEMPERATURE FOR VISCOUS FLOW OF LIQUID SOLUTIONS OF AGAROSE

A.H.ASADOVA

SUMMARY

In the present work the dynamic viscosity and density of the liquid solutions of agarose (M=120000 g/mol) in 0.01%÷0.09% concentration interval and 288÷323K temperature interval were determined. Due to the experimental results the activation parameters (free energy, entropy and enthalpy) for viscous flow were determined in given temperature and concentration interval. The results show that the activation parameters are depend on the temperature and very sensitive to the structure of solution.

Key words: agarose, activation parameters

MÜNDƏRİCAT

RİYAZİYYAT

Əhmədov Ə.M., Babayev R.M.

Xətti Məhdud Operatorların bir iterativ ardıcılıqları və tətbiqi haqqında 5

Mehrəliyev Y.T., Alizadə F.H.

Qeyri -lokal sətrli bir dörd tərtibli Bussinesk tənliyi üçün qeyri -xətti tərs sərhəd məsələsinin həll olunması haqqında 12

Əliyev N.Ə., Osmanov V.Ə.Kəsr tərtibli 2α tərtibdən inteqro-differensial tənlik üçün üç nöqtəli sərhəd məsələsi 28**Əhmədov E.M.**

Adi birtərtibli xətti diferensial tənliklər sistemi üçün yarımoxda səpilmə məsələsi 35

Əhmədov Ə.M., Səfərli İ.V.

Bir rekurent ardıcılıq və onun tətbiqi haqqında 40

Eyvazlı G.M.

Yarımoxda ikinci tərtib diferensial operatorların mənfə məxsusi ədədlərinin paylanma funksiyası ilə bağlı bəzi bərabərsizliklər 47

Əliyev N.Ə., Osmanov V.Ə.

Kəsr tərtibli inteqro-differensial tənlik üçün Koşi məsələsinin araşdırılması 55

İNFORMATİKA

Ağalarova S.V.

Gilli neft layına su-qaz qarışığı ilə təsir prosesinin modelləndirilməsi 59

FİZİKA

Abbasova G.C., Hacıyeva L.S., Səfərli G.R.

Tripeptid molekulun struktur parametrləri 70

Useynova S.M.

Mayələrin dielektrik xarakteristikalarının ifrat yüksək tezliklər diapazonunda variasion ölçmə metodunun nəzəri prinsipləri (Polyar mayələrin dielektrik parametrlərinin variasion metodla təyində mümkün olan xətlərin analizi) 74

Əsədova A.H.

Aqarozanın suda məhlullarının özlü axının aktivləşmə parametrlərinin temperaturdan asılılığı 84

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Ахмедов А.М., Бабаев Р.М.
Об одной последовательности линейных ограниченных операторов и их приложений. 5

Мегралиев, Ализаде Ф.Х.
О разрешимости одной нелинейной я.т. обратной краевой задачи для одного уравнения Буссинска четвёртого порядка с нелокальными условиями 12

Алиев Н.А., Османов В.А.
Трехточечная краевая задача для дробных интегродифференциальных уравнений 28

Ахмедов Э.М.
Задача рассеяния для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка на полуоси. 35

Ахмедов А.М., Сафарли И.В.
Об одной рекуррентной последовательности и её применение 40

Эйвазлы Г.М.
Некоторые неравенства, связанными с функциями распределения отрицательных собственных значений дифференциальных операторов на полуоси..... 47

Алиев Н.А., Османов В.А.
Исследование задачи Коши для дробно-интегрально-дифференциальных уравнений..... 55

ИНФОРМАТИКА

Агаларова С.В.
Моделирование процесса водогазового воздействия на глинистый нефтяной пласт..... 59

ФИЗИКА

Аббасова Г.Д., Гаджиева Л.С., Сафарли Г.Р.
Геометрические параметры структуры трипептидной молекулы 70

Усейнова С.М.
Разработка вариационного метода измерения диэлектрических параметров полярных жидкостей в диапазоне сверхвысоких частот (Анализ погрешностей измерения диэлектрических параметров полярных жидкостей вариационным методом) 74

Асадова А.Х.
Температурная зависимость активационных параметров для вязкого течения видных растворов агарозы..... 84

CONTENTS

MATHEMATIC

Akhmedov A.M., Babayev R.M. On the iterative sequences of the linear bounded operators and applications.....	5
Mehraliyev Y.T., Alizade F.Kh. on the solvability of a nonlinear inverse boundary value problem for a single fourth-order bussinsk equation with nonlocal conditions	12
Aliyev N.A., Osmanov V.A. Three-point boundary value problem for fractional integro-differential equations.....	28
Ahmadov E.M. The scattering problem for systems of linear first-order ordinary differential equations on the semi-axis.....	35
Akhmedov A.M., Safarli I.V. On the recurrence sequence and their applications	40
Eyvazli G.M. Some inequalities related to distribution functions of negative eigen values of differential operators on the semi-axis.....	47
Aliyev N.A., Osmanov V.A. Investigation of the Cauchy problem for fractional integral differential equations	55

INFORMATICS

Aghalarova S.V. Modelling of the process of water-gas stimulation on a clay bearing oil layer	59
--	----

PHISIC

Abbasova G.D., Hajiyeva L.S., Safarli G.R. Geometric structure parameters of tripeptide molecule.....	70
Useynova S.M. Development of variational method for measuring of dielectric parameters of polar liquids at microwave frequencies. (Analysis of errors in measuring of the dielectric parameters of polar liquids by the variation method).....	74
Asadova A.H. The dependence of activation parameters on temperature for viscous flow of liquid solutions of agarose	84